

Inlämningsuppgift 1 Autonoma differentialekvationer - dynamik i kontinuerlig tid

Lösningarna till denna inlämningsuppgift skall skrivas på engelska.

DEL I. 1-dimensionella system.

1. En enkel modell för hur en djurpopulations storlek varierar över tiden fås genom att anta att såväl antalet födda som avlidna individer under ett tidsintervall är proportionellt mot populationens storlek och mot tidsintervallets längd. Formulera denna modell som en differentialekvation, lös differentialekvationen och nämn modellens begränsningar.

2. En vanlig populationsmodell i kontinuerlig tid för en djurart som lever i en miljö med begränsade resurser är den så kallade *logistiska modellen*. Om antalet individer vid tiden t betecknas med $y(t)$ antas $y(t)$ uppfylla begynnelsevärdesproblemet

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K} \right), \quad y(0) = y_0,$$

där r och K är positiva konstanter.

a). Vilka antaganden och resonemang ligger bakom formuleringen av begynnelsevärdesproblemet (1)?

b). Skissera differentialekvationens riktningsfält (eng. *Direction field*) och typiska lösningskurvor för hand.

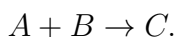
c). Undersök ekvationen numeriskt eller grafiskt med lämplig programvara.

d). Lös ekvationen analytiskt (dvs så att du får en explicit formell för $y(t)$).

e). Ange differentialekvationens stationära lösningar och ange också deras stabilitet.

f). Tolka sedan dina resultat och beskriv i ord hur populationen utvecklar sig för olika begynnelsevärden. Vilken tolkning kan man ge konstanterna r och K ?

3. **Modellering av kemiska reaktioners förlopp.** Vi tänker oss två ämnen A och B som reagerar med varandra för att bilda ämne C ,



En vanlig modell är att anta att reaktionshastigheten, det vill säga den hastighet med vilken C s koncentration växer, vid varje tidpunkt är proportionell mot produkten av reagenternas (A :s och B :s) koncentrationer.

a). En vanlig antagande är att reaktionshastigheten är proportionell mot produkten av reagenternas koncentrationer? Motivera kort.

Låt $c(t)$ beteckna koncentrationen av ämne C vid tiden t . Modellera reaktionen $A + B \rightarrow C$ med en första ordningens ordinär differentialekvation för funktionen $c(t)$. (Se t. ex. Zill & Wright *Differential Equations with Boundary-Value Problems*, 8:e upplagan, sid 23.). Vi väljer

t så att reaktionen startar vid $t = 0$; detta innebär att $c(0) = 0$. Vi ska studera motsvarande begynnelsevärdesproblem för $c(t)$.

- b). Skissera differentialekvationens riktningsfält och typiska lösningskurvor för hand.
- c). Undersök differentialekvationen numeriskt eller grafiskt med lämplig programvara.
- d). Ange differentialekvationens stationära lösningar och ange också deras stabilitet.
- e). Vad händer med lösningen motsvarande $c(0) = 0$ då tiden växer? Ge en kort tolkning av detta i termer av reaktionens förlopp.

4. Låt f vara en kontinuerlig reellvärd funktion av en reell variabel. Visa att en autonom differentialekvation

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

endast kan ha montont växande, montont avtagande eller konstanta lösningar. (Speciellt kan de alltså inte ha oscillerande lösningar).

DEL II. Flerdimensionella system

Lotka-Volterra ekvationerna

Vi ska studera system av differentialekvationer som modellerar hur två djurpopulationers storlekar utvecklas och påverkar varandra. Vi tänker oss en rovdjursart som lever uteslutande av en bytesdjursart som i sin tur inte har några andra fiender än rovdjursarten i modellen.

Låt $x(t)$ vara antalet rovdjur och låt $y(t)$ vara antalet bytesdjur vid tiden t . I Lotka-Volterras klassiska modell antas dessa variabler uppfylla följande system av differentialekvationer.

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax + bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cxy + dy \end{cases}$$

där a, b, c och d är positiva konstanter.

5. Redogör för vilka antaganden som ligger bakom formuleringen av systemet (2). Förklara speciellt vilket resonemang som ligger bakom produkttermerna xy .

6. Enligt Lotka-Volterras modell, hur utvecklar sig bytesdjurspopulationen om det inte finns några rovdjur? Hur utvecklar sig rovdjurspopulationen i avsaknad av bytesdjur?

7. Studera systemet (2) numeriskt för några olika uppsättningar värden på konstanterna a, b, c och d .

8a. Låt nu konstanterna a, b, c och d vara strikt positiva. Bestäm stationära (=kritiska) punkter till systemet (2).

8b. För att studera stabilitet av (en av) de stationära punkterna ovan ska vi använda en så kallad *Lyapunov funktion*. Las kapitel om Lyapunov funktioner bifogad i litteraturlistan. Som en förberedande övning på begreppet av Lyapunov funktioner, lös följande problem (ur Boyce-DiPrimas bok). *Betrakta ett system av differentialekvationer*

$$dx/dt = y - xf(x, y), \quad dy/dt = -x - yf(x, y)$$

där f är kontinuerlig och har kontinuerliga första partiella derivator. Visa att om $f(x, y) > 0$ i någon omgivning av origo, så är origo en asymptotiskt stabil fixpunkt.

Tips: använd en Lyapunov funktion på formen $L(x, y) = c(x^2 + y^2)$ där c är en konstant.

När ni presenterar lösningen, formulera motsvarande sats ur boken och förklara noga hur ni använder den!

8c. Gör en stabilitetsanalys av de stationära punkterna i **8a**. OBS: en av de stationära punkterna är svårare att analysera än den andra. Ett sätt att avgöra stabiliteten hos den "svårare" punkten är att använda en Lyapunov funktion $H(x, y) = d \ln x - cx + a \ln y - by$.

9. Redogör för hur de allmänna lösningskurvor till (2) ser ut, åtminstone lokalt nära den "svårare" stationära punkten (du behöver inte härleda lösningarna; den ovannämnda Lyapunov funktionen $H(x, y)$ kan vara till hjälp).

10. Sammanfatta kort vad lösningarna till systemet (2) säger om de två djurpopulationernas utveckling.

11. Antag att systemet får en mycket liten (inte nödvändigtvis linjär) störning. Det kan komma från att, till exempel, en liten mängd av bytesdjur eller rovdjur planteras in vid ett tillfälle. Det nya systemet blir, som sagt, mycket nära system (2). Vad kan man säga om lösningarna till det nya systemet efter en long tid? Med andra ord, kan en liten störning detta system leda till bestående förändringar i lösningarnas karaktär?

Vi kan modifiera Lotka-Volterras ekvationer så att bytesdjurens egen dynamik i avsaknad av rovdjur beskrivs av en logistisk ekvation.

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax + bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cxy + ry(1 - \frac{y}{K}) \end{cases}$$

där a, b, c, r och K är positiva konstanter, och där $K > a/b$.

12. Bestäm stationära punkter till systemet (3) och analysera deras stabilitet. Skissera systemets fasporträtt. Tolka resultat i ord.

13. Antag att system (3) får en mycket liten störning. Vad kan man säga om lösningarna till det nya systemet efter en long tid? Med andra ord, kan en liten störning av detta system leda till bestående förändringar i lösningarnas karaktär? Jämför med fråga 11.

Modeller som dessa används bland annat för att analysera hur djurpopulationer påverkas av mänsklig påverkan genom jakt. Vi kan till exempel tänka oss en rovfiskspopulation och en bytesfiskspopulation vars storlekar utvecklas enligt (3). Ett sätt att modellera hur ett måttligt fiske påverkar de båda fiskbestånden ges av följande modifierade version av ekvationerna (3).

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax + bxy - \delta x \\ \frac{dy}{dt} = -cxy + ry(1 - \frac{y}{K}) - \epsilon y, \end{cases}$$

där a, b, c, r och K är som ovan och δ och ϵ är positiva konstanter.

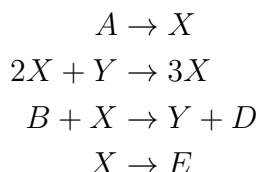
14. Formulera kort det antagande som ligger bakom modifieringen av ekvationerna.

15. Visa att systemet (4) uppfyller det som brukar kallas *Volterras princip*: Om både rovfisk och bytesfisk utsätts för ett måttligt fiske (δ och ϵ är små positiva konstanter), så kommer **i långa loppet** bytespopulationen att vara större och rovdjurspopulationen mindre jämfört med om inget fiske hade förekommit ($\delta = \epsilon = 0$).

Belousov-Zhabotinsky reaktionerna och Brusselator-modellen

Belousov-Zhabotinsky reaktioner är en klass av kemiska reaktioner som uppvisar en rad intressanta fenomen. Under vissa förutsättningar fås stabilt periodiskt oscillerande koncentrationer, så kallade kemiska klockor. Sök på youtube efter Belousov-Zhabotinsky reactions och se ett kemikalisk underverk!

Vi ska nu studera ett nytt system av modellreaktioner (den s k Brusselatormodellen¹), som är tänkta som en enkel model som ska fånga vissa egenskaper hos Belousov-Zhabotinsky reaktionerna. A , B , D , E , X och Y är tänkta ämnen som reagerar enligt



16. Skriv upp det system av differentialekvationer som gäller för koncentrationerna av de ingående ämnena, om vi som tidigare antar att reaktionshastigheten är proportionell mot produkten av reagenternas koncentrationer.

Antag nu att koncentrationerna för ämnena A , B , D och E hålls på fixa konstanta positiva nivåer, genom att A och B tillförs reaktionen i samma takt som de förbrukas medan D och E avlägsnans ur systemet i samma takt som de produceras. Vi är intresserade av att se hur koncentrationerna av de två ämnena X och Y varierar över tid.

Vi gör också följande förenklande antaganden.

- Alla proportionalitetskonstanter är $= 1$.
- Ämne A hålls på fix koncentration $a = 1$.

De gjorda antagandena leder till följande system av differentialekvationer,

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - (b+1)x + x^2y \\ \frac{dy}{dt} = bx - x^2y \end{cases}$$

där $x(t)$ och $y(t)$ är koncentrationerna av ämnena X respektive Y , och b är den fixa koncentrationnivån för ämne B , som tas som en kontrollparameter i systemet.

17. Visa att systemet (5) har en unik stationär punkt (x_0, y_0) , och bestäm denna (den kommer att bero b). Vad är den kemiska tolkningen av den stationära punkten?

¹Modellen introducerades av en forksargrupp i Bryssel, där av namnet, under ledning av Ilya Prigogine, som fick Nobelpriset i kemi 1977 för sina studier av system långt från jämvikt

18. Ni ska nu undersöka den stationära punktens stabilitet och hur den beror på b . Klassificera den stationära punkten för olika värden på $b > 0$, och skissera relevanta fasporträtt. Det finns två värden på b , när den stationära punkten byter karaktär (man säger att systemet genomgår en *bifurkation*), bestäm dessa.

19. Innan vi börjar analysera systemet (5), låt oss titta på ett modellsystem. Läs kapiteln om Hopf bifurcation (Periodic solutions and limit cycles) i litteraturlistan. Gör ex. 16 på sidan 557 med ett följande tillägg: skissera (för hand) fasporträtt motsvarande $\mu < 0$, $\mu = 0$ och $\mu > 0$.

20. Studera systemet (5) numeriskt/grafiskt för olika lämpliga värden på b . Målet är att kunna säga hur typiska lösningskurvor beter sig i långa loppet. De två bifurkationsvärdena på b du fann i uppgift 18 ger tre intervall av b -värden, gör minst en undersökning i vart och ett av dessa intervall. Undvik b -värdena alltför nära bifurkationsvärdena, numeriken blir långsammare och mer krävande där.

21. Du bör nu ha funnit att det finns ett värde $\hat{b}$ sådant att om $b > \hat{b}$ så är den stationära punkten instabil, och att de numeriska undersökningarna tyder på att de typiska lösningskurvorna, när $b > \hat{b}$, i långa loppet närmar sig ett periodiskt förlopp, det vill säga att systemet har en så kallad *stabil (attraktiv) gränscykel* (eng. *stable limit cycle*).

a). Läs i artikeln *Hopf bifurcation* av Gert van der Heijden, första avsnittet "Hopf bifurcation for flows" (sidan 1 - 2).

b). Definiera begreppen *bifurkation* och *Hopf bifurkation*.

c). Formulera satsen som finns i texten (skriv om den till er redovisning med alla dess förutsättningar). Verifiera att systemet (5) verkligen genomgår Hopf-bifurkation, där fixpunkten förlorar sin stabilitet och en stabil gränscykel uppstår.

22. Sammanfatta din resultat för systemet (5) och tolka resultatet:

a) Hur kommer koncentrationerna för ämnena X och Y att variera i långa loppet för olika värden på b ?

b) Antag att systemet startar i jämvikt—hur kommer det, för olika värden på b , att reagera på små störningar, i form av tillskott av ämne X eller Y ?

SIR model

Många modeller av COVID19 baseras på följande SIR model. Hela befolkningen delas upp i tre kategorier:

$S(t)$ — Susceptibles, dvs de som är mottagliga vid tid t ,

$I(t)$ — Infected, dvs de som har sjukdomen vid tid t , och

$R(t)$ — Recovered. Här inkluderas både de som har blivit friska och utvecklat motståndskraft mot infektionen, och de som har dött.

Läs om modellen i boken [J.D.Murray, Mathematical biology, sid. 610-618], en kopia finns på hemsidan. Man får följande modell:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{dS}{dt} = -rSI \\ \frac{dI}{dt} = rSI - aI \\ \frac{dR}{dt} = -aI \end{cases}$$

$$S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = 0,$$

- 23.** a). Vilka antaganden och vilka resonemang ligger bakom formuleringen av denna modell?
 b). Vilken tolkning kan man ge konstanterna r , a , S_0 , I_0 , $\rho = \frac{a}{r}$, $R_0 = \frac{rS_0}{a}$?
 c). Hur ser man från ekvationssystemet att totalt antal individer i modellen är konstant för all tid?—dvs att för alla t

$$I(t) + S(t) + R(t) = S_0 + I_0 = N.$$

- d). Välj en uppsättning av konstanter och undersök systemet numeriskt eller grafiskt med lämplig programvara. Vad händer med kurvan $y = I(t)$ om man fördubblar R_0 ? och behåller samma populationsstorlek? Vilka slutsatser kan man dra? Tolka sedan ditt resultat.

24. Givet initialdata r , a , S_0 , I_0 , hur vet man om sjukdomen kommer att spridas?

25. Uttryck det maximala värdet av $I(t)$, I_{max} , i termer av initialdata och konstanterna r , a . Tolka detta uttryck: hur kan r , a ändras för att minska I_{max} ?

26. Hur många kommer att bli sjuka totalt (i termer av initialdata)? Måste alla bli sjuka för epidemin skall ta slut?

En bra förklaring finns på <https://www.youtube.com/watch?v=NKMHhm2Zbkw>