

Föreläsning 30 i ADK20

Approximationsalgoritmer

Viggo Kann

KTH

Om man **måste** lösa ett NP-fullständigt problem, vad gör man då?

- 1 Begränsa problemet - vissa typer av indata kanske är enklare
- 2 Lös bara för små indata med en exponentiell algoritm
- 3 Om optimeringsproblem: Använd en **approximationsalgoritm** som garanterat ger en lösning som är nära den optimala
- 4 Om optimeringsproblem: Använd en **heuristik** som ger en lösning som förhoppningsvis är bra (se föreläsning 29)
- 5 Kombinera 1 med 2, 3 eller 4

- NP-fullständiga problem kan (nog) inte lösas i polynomisk tid
- Många NP-fullständiga problem är egentligen optimeringsproblem
- Kan man i polynomisk tid approximera ett optimeringsproblem, d.v.s. hitta en lösning som säkert är nära den optimala lösningen?
- Svar: Ja, för vissa problem, men inte för alla

Exempel: Minimal hörntäckning

Approximationsalgoritm:

$S \leftarrow \emptyset$

while $E \neq \emptyset$ **do**

 Plocka kant $\langle v_1, v_2 \rangle$ från E

$S \leftarrow S \cup \{v_1, v_2\}$

 Plocka bort alla kanter i E som har ändpunkt i v_1 eller v_2

return S

Tidskomplexitet:

- Varje kant i E behandlas bara en gång, inget annat arbete görs.
- $\Rightarrow \mathcal{O}(|E|)$

Korrekthet:

- Lösningen S är en hörntäckning av grafen ty varje kant i grafen plockas bort från E och en kant plockas bara bort då minst en av dess ändpunkter stoppats in i S

Approximation:

- Den funna lösningen innehåller högst dubbelt så många hörn som den optimala lösningen, ty:

$$\text{OPT}_G \geq \text{OPT}_M = \frac{1}{2} \cdot \text{APPROX}$$

- OPT_G = Antalet hörn i den optimala lösningen av ursprungsproblemet
- OPT_M = Antalet hörn i den optimala lösningen på den delgraf som bara består av de plockade kanterna i grafen
- APPROX = Antalet hörn i lösningen som approximationsalgoritmen returnerar

Approximationskvoten för en algoritm är

- $\frac{\text{APPROX}}{\text{OPT}}$ för minimeringsproblem
- $\frac{\text{OPT}}{\text{APPROX}}$ för maximeringsproblem

Approximationskvoten är alltid ≥ 1

Exempel: Approximationsalgoritmen för minimal hörntäckning har approximationskvoten 2

- Algoritmen approximerar minimal hörntäckning inom faktorn 2
- Problemet minimal hörntäckning kan approximeras inom faktorn 2

Problemklasser för approximation

- **NPO** = {Optimeringsproblem i $\mathcal{NP}$ }

Exempel:

- TSP
- Max klick
- Min mängdtäckning

- **APX** = {Problem som kan approximeras inom någon konstant}

Exempel:

- Min hörntäckning
- TSP med triangelolikhet
- MAX 3CNFSAT

- **PTAS** = {Problem som kan approximeras inom varje konstant $1 + \varepsilon$ }

Exempel:

- Max delmängdsumma
- TSP i planet

PTAS=Polynomial Time Approximation Scheme

