Föreläsning 24 i ADK20

Cooks sats

Viggo Kann

KTH

NP-fullständiga problem

- Ett beslutsproblem Q är NP-fullständigt om
  1. $Q \in \mathcal{NP}$
  2. $Q' \leqslant_p Q$ för alla $Q' \in NP$

  Där $\leqslant_p$ är en karp-reduktion som går i polynomisk tid
- Ett problem som uppfyller villkor 2 är <u>$\mathcal{NP}$-svårt</u>
- Ännu inte bevisad tes:
  - $\mathcal{NP}$-svåra problem kan inte lösas i polynomisk tid, dvs. $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$

Cooks sats (1971)

SAT, satisfierbarhetsproblemet, är $\mathcal{NP}$-fullständigt

Följdsats

SAT $\leqslant_p Q \Rightarrow Q$ är $\mathcal{NP}$-svårt

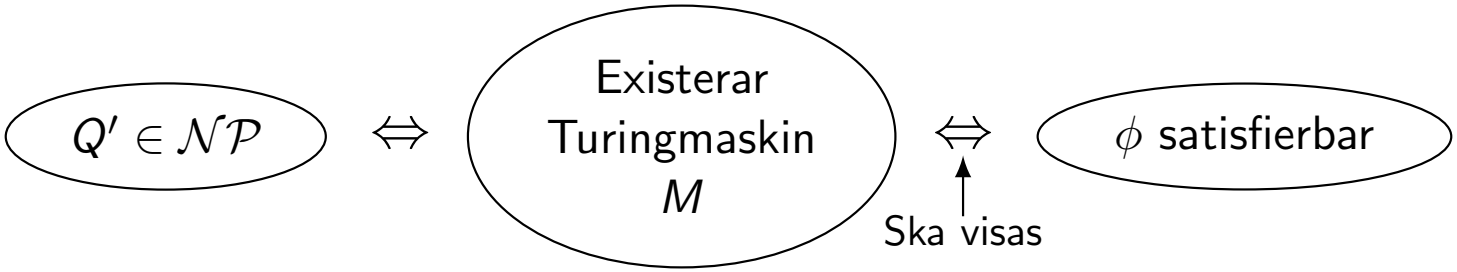
Inbäddning av turingmaskin som SAT-problem

- Numrera M-s tidssteg från 1 till $k \cdot n^c$
- Vid varje tidpunkt t beskrivs beräkningen av
  - Aktuellt tillstånd q
  - bandets aktuella innehåll
  - huvudets position på bandet
- Obs: vad som finns bortom position $k \cdot n^c$ på bandet är inte intressant
- Inför booleska variabler:
  - $x_{qt} \quad q \in Q, \quad 1 \leqslant t \leqslant k \cdot n^c$
  - $y_{ijt} \quad i \in \{0,1,\#\}, \quad 1 \leqslant j \leqslant k \cdot n^c, \quad 1 \leqslant t \leqslant k \cdot n^c$
  - $z_{jt} \quad 1 \leqslant j \leqslant k \cdot n^c, \quad 1 \leqslant t \leqslant k \cdot n^c$
- Vi vill att
  - $x_{qt} = 1$ omm M är i tillstånd q vid tid t
  - $y_{ijt} = 1$ omm tecknet i står i ruta j på bandet vid tid t
  - $z_{jt} = 1$ omm huvudet står i ruta j vid tid t

Bevis av Cooks sats

1. SAT $\in \mathcal{NP}$ (är enkelt)
2. Visa att $Q' \in \mathcal{NP} \Rightarrow Q' \leqslant_p$ SAT

- $Q' \in \mathcal{NP} \Rightarrow$ Det finns en ickedeterministisk turingmaskin M som accepterar Q' i tid $k \cdot n^c$ där n är indatas längd
- Vi kan anta att M har ett (halvoändligt) band och alfabet $\{0,1,\#\}$
- Givet indata $(a_1, \ldots, a_n)$, konstruera en boolesk formel ϕ så att $(a_1, \ldots, a_n) \in Q' \Leftrightarrow \phi$ är satisfierbar $\Leftrightarrow$
- $\Leftrightarrow \exists$ beräkning i tid $k \cdot n^c : M(a_1, \ldots, a_n)$ accepterar
- Låt oss försöka beskriva M-s beräkning med hjälp av en boolesk formel!



Bevis av Cooks sats

"$\exists$ beräkning i tid $k \cdot n^c$: $M(a_1, \ldots, a_n)$ accepterar" $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ① & \text{Beräkningen börjar med } a_1, \ \ldots, \ a_n \\ ② & x, \ y, \ z \text{ beskriver en giltig beräkning} \\ ③ & \text{beräkningen accepterar} \end{cases}$$

1. $\begin{cases} x_{q,1} = 1 & \text{om } q = q_0 \\ x_{q,1} = 0 & \text{annars} \end{cases}$

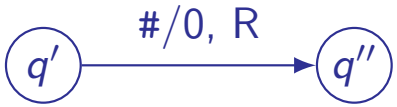
   $\begin{cases} y_{i,j,1} = 1 & \text{om } (i = a_j \text{ och } 1 \leqslant j \leqslant n) \text{ eller } (i = \# \text{ och } j > n) \\ y_{i,j,1} = 0 & \text{annars} \end{cases}$

   $\begin{cases} z_{1,1} = 1 & \text{om } q = q_0 \\ z_{j,1} = 0 & \text{annars} \end{cases}$

3. $x_{q_a,1} = 1 \vee x_{q_a,2} = 1 \vee \cdots \vee x_{q_a,k \cdot n^c} = 1$
   Där q_a är det accepterande tillståndet

Bevis av Cooks sats

2.
   - För varje $2 \leqslant t \leqslant kn^c$ konstruera formel som beskriver tillåtna samband mellan $x_{q,(t-1)}, y_{i,j,(t-1)}, z_{j,(t-1)}$ och $x_{q,t}, y_{ijt}, z_{j,t}$
   - Ex: övergången



   (om # står i rutan, skriv 0 och flytta huvudet ett steg åt höger) beskrivs som
   - $x_{q',(t-1)} = 1 \wedge y_{\#,j,(t-1)} = 1 \wedge z_{j,(t-1)} = 1 \Rightarrow$
     $\Rightarrow [x_{q'',t} = 1 \wedge \bigwedge_{q \neq q''} x_{q,t} = 0 \wedge$
     $\wedge\ y_{0,j,t} = 1 \wedge y_{1,j,t} = 0 \wedge y_{\#,j,t} = 0 \wedge$
     $\wedge \bigwedge_{\substack{i \in \{0,1,\#\} \\ j' \neq j}} y_{i,j',t} = y_{i,j',(t-1)} \wedge$
     $\wedge\ z_{j+1,t} = 1 \wedge \bigwedge_{j' \neq j+1} z_{j',t} = 0]$
     för $1 \leqslant j \leqslant k \cdot n^c$