

Föreläsning 23 i ADK20

Oavgörbarhet

Stefan Nilsson

KTH

Avgörbart och oavgörbart

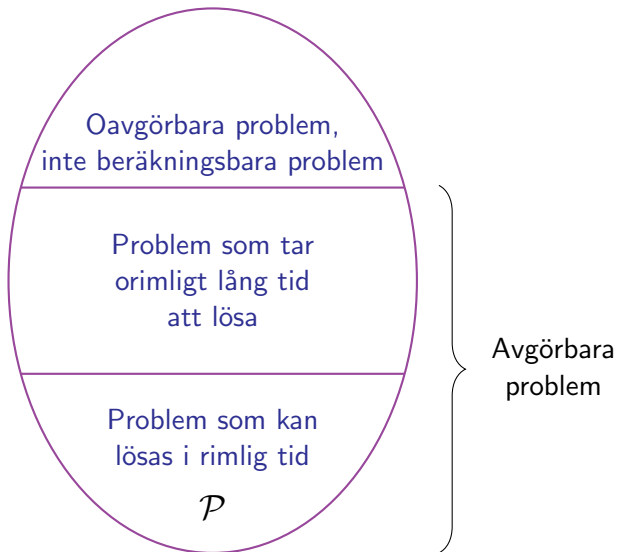
- Ett problem som har en algoritm som för alla instanser kan hitta en lösning i ändlig tid kallas **avgörbart**
- Ett problem som inte kan lösas i ändlig tid av någon algoritm kallas **oavgörbart**

Varje problem som bara har ett ändligt antal probleminstanser är avgörbart

Förutsatt att varje lösning kan skrivas ner i ändlig tid

Avgörbarhet/oavgörbarhet används i första hand om beslutsproblem
Annars talar man om **beräkningsbarhet**

Avgörbart och oavgörbart



Oavgörbart problem 1: Kakelläggarproblemet

- **Instans:** Ett antal typer av kvadratiska kakelplattor, där en viss kant ska vara nedåt
- **Fråga:** Går det att kakla varje $m \times m$ -ruta med kakelplattor av endast de givna typerna så att mönstret stämmer överallt?

Exempel:



Typ 1

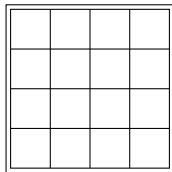


Typ 2



Typ 3

4 × 4:



Oavgörbart problem 2: Ordöverensstämmelse

- **Instans:** Mängd ordpar $\{(x_i, y_i)\}$
- **Fråga:** Finns det någon ändlig talföljd $a_1, a_2, \dots$ så att $x_{a_1}x_{a_2}x_{a_3}\dots = y_{a_1}y_{a_2}y_{a_3}\dots$

Exempel 1:

- $\{(abb,bbab), (a,aa), (bab,ab), (bab,ab), (baba,aa), (aba,a)\}$
- Överensstämmelse fås med 2, 1, 1, 4, 1, 5:

2	1	1	4	1	5
a	a	b	b	a	b
2	1	1	4	1	5

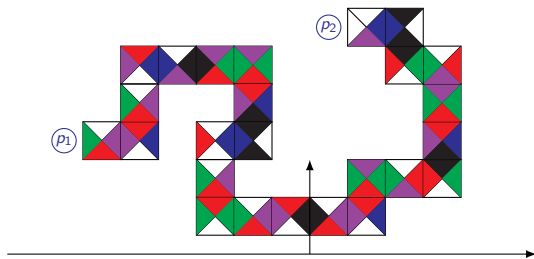
Exempel 2:

- $\{(bb,bab), (a,aa), (bab,ab), (bab,ab), (baba,aa), (aba,a)\}$
- Ingen överensstämmelse kan fås!

Oavgörbart problem 2: Orm i kakel

- **Instans:** Mängd typer av kakelplattor, två punkter, p_1 och p_2 , i planet
- **Fråga:** Går det att kakla en “orm” som börjar i p_1 och slutar i p_2 , där mönstret passar överallt och där ormen håller sig i övre halvplanet?

Exempel:



Avgörbar variant av Orm i kakel:

- Samma problem, men ormen behöver inte hålla sig i övre halvplanet

Fler oavgörbara problem

Oavgörbart problem 4: Stopproblemet

- **Instans:** Program P och inmatning X till programmet
- **Fråga:** Kommer programmet P någonsin att stanna om det startas med indata X ?

Oavgörbart problem 5: Programverifiering

- **Instans:** Program P och specifikation S som beskriver vad P ska mata ut för varje indata.
- **Fråga:** Uppfyller programmet specifikationen?
- P uppfyller specifikationen om det för varje möjlig indata stannar och producerar den lösning som anges av S

Bevis av oavgörbarhet

- Reducera ett problem som du vet är oavgörbart till ditt problem
- Om reduktionen i sig är beräkningsbar så är också ditt problem oavgörbart

Exempel: Visa att detta problem är oavgörbart:

- **Instans:** Program P
- **Fråga:** Stannar P på alla indata?

Reduktion från stopproblemet:

```
function STOPP( $P, X$ )  
  function Q( $Y$ )  
    if  $X = Y$  then  $P(X)$   
    else stop  
  return STOPPFÖRALLA(Q)
```


Stopp på blankt

- $\text{STOPP-PÅ-BLANKT}(P)$ är problemet: "Stannar P någonsin om det startas med tomt indata?"
- Visa att STOPP-PÅ-BLANKT är oavgörbart genom att reducera vanliga stopproblemet!

Bevis av stoppproblemets oavgörbarhet

- Anta att $\text{STOPP}(P, X)$ löser stoppproblemet, dvs. att stoppproblemet är avgörbart, och visa att detta leder till en motsägelse
- Konstruera programmet $\text{META}(P)$ på följande sätt:

```
function META( $P$ )  
|   if STOPP( $P, P$ ) then  
|   |   while True do nothing  
|   else return
```

- Vad händer vid anropet $\text{META}(\text{META})$?
 - ① $\text{META}(\text{META})$ går i oändlig slinga; då är $\text{STOPP}(\text{META}, \text{META})$ falskt och programmet stannar. Orimligt!
 - ② $\text{META}(\text{META})$ stannar så småningom; då är $\text{STOPP}(\text{META}, \text{META})$ sant och programmet går in i oändlig slinga. Orimligt!

Gemensam egenskap: Ändlig verifikation

En lösning till ett $\mathcal{NP}$ -fullständigt problem kan verifieras i polynomisk tid.

På motsvarande sätt:

- En lösning till något av de beskrivna oavgörbara problemen kan verifieras i **ändlig** tid.

Exempel: Stopproblemet

Om P stannar på indata X så kan beräkningen verifieras i ändlig tid

Exempel: Ordöverensstämmelse

Om det går att få överensstämmelse med en viss talföljd så är det lätt att kolla att $x_{a_1}x_{a_2} = y_{a_1}y_{a_2}$

Exempel: Kakelläggning

Om det finns någon $m \times m$ -ruta som inte kan kaklas så kan det (ganska) lätt verifieras: kolla alla tänkbara kaklingar av denna ruta.

Dubbel ändlig verifikation

- För kakelläggning kan nej-lösningar verifieras
- För ordöverensstämmelse kan ja-lösningar verifieras

Om man för ett problem både kan verifiera ja-lösningar och nej-lösningar så måste problemet vara avgörbart

Bevis:

- Gå igenom alla tänkbara lösningar i ordning (börja med alla lösningar av längd 1, sedan längd 2, osv.)
- Testa för var och en om den är en ja-lösning eller nej-lösning
- Avbryt så fort en verifiering lyckas
- Denna procedur är ändlig eftersom man förr eller senare testat en riktig lösning

Rekursiv och rekursivt uppräknelig

- **Rekursiv funktion** = beräkningsbar funktion = funktion som stannar för alla indata
- **Rekursiv mängd** = Språk som kan kännas igen av någon rekursiv funktion
- **Rekursivt uppräknelig funktion** = funktion med ändlig verifikation av ja-lösningar
- **Rekursivt uppräknelig mängd** = Språk som kan kännas igen av någon rekursivt uppräknelig funktion
- **R.E.-fullständiga problem** = De svåraste problemen som kan lösas med rekursivt uppräkneliga funktioner

Stopproblemet är R.E.-fullständigt

