

Preliminära betygsgränser: A–21 poäng, B–19, C–16, D–13, E–11, Fx–10.

Del 1.

1. Lös följande partiella differentialekvation med hjälp av variabelseparation

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} && \text{för } x \in (0,1) \text{ och } t > 0 \\ -\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= u(1,t) = 0 && \text{för } t > 0 \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned} \quad (1)$$

där

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{för } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{för } x = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{för } \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

Du behöver inte visa att din Fourierserie konvergerar då $t = 0$.

[4 poäng]

Lösningsförslag fråga 1: Vi antar att lösningen är på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$. Om vi sätter in detta i differentialekvationen och delar med $X(x)T(t)$ så får vi att

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}.$$

Då högerledet är oberoende av x och vänsterledet av t så måste båda leden vara konstanta; d.v.s.

$$X''(x) \pm \lambda^2 X(x) = T'(t) \pm \lambda^2 T(t) = 0. \quad (2)$$

Vi får tre fall: $\lambda = 0$ i (2), eller $\lambda \neq 0$ med + respektive $-$ i (2). Men om $\lambda = 0$ så får vi att $X(x) = ax + b$, men det första randdatat implicerar då att $a = 0$ och sedan implicerar det andra randdatat att $0 = X(1) = 0 \cdot 1 + b$ så $b = 0$. Men om $a = b = 0$ så är $X(x) = 0$ och vi har endast den triviala lösningen - så $\lambda = 0$ ger inga icke-triviala lösningar.

Om vi har $-$ och $\lambda \neq 0$ i (2) så får vi lösningen $X(x) = ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x}$. Men då ger $0 = X'(0) = (a - b)\lambda$ så $a = b$ men det andra randdatat ger då att $0 = (ae - b/e)$ vilket implicerar att $a = b = 0$ eftersom $a = b$. Så det enda fallet som ger icke-triviala lösningar är om $\lambda \neq 0$ och om vi har $+$ i (2).

Om vi har $+$ i (2) så är lösningarna

$$X(x) = a \cos(\lambda x) + b \sin(\lambda x).$$

Eftersom $0 = X'(0) = b\lambda$ så måste $b = 0$. Och $0 = X(1) = a \cos(\lambda)$ implicerar att $a = 0$ (vilket ger en trivial lösning igen) eller $\lambda = \frac{\pi}{2} + n\pi$ för $n \in \mathbb{N}$.

För att förenkla notationen så skriver vi $\lambda_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$. Vi får att följande funktioner är lösningar till differentialekvationen och randdata:

$$ae^{-\lambda_n^2 t} \cos(\lambda_n x).$$

För att få en lösning till initialdata så ansätter vi att lösningen är

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 t} \cos(\lambda_n x).$$

Vi beräknar a_n genom att identifiera a_n med Fourierkoefficienterna för $f(x)$: d.v.s.¹

$$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos(\lambda_n x) dx = 2 \int_0^{1/2} \cos(\lambda_n x) dx = 2 \left[\frac{\sin(\lambda_n x)}{\lambda_n} \right]_{x=0}^{1/2} = \frac{2 \sin(\lambda_n/2)}{\lambda_n}.$$

Vi får därför följande **Svar:** Lösningen är

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(\lambda_n/2)}{\lambda_n} e^{-\lambda_n^2 t} \cos(\lambda_n x)$$

där $\lambda_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$.

2. Låt $V \subset L^2([-1,1]; \mathbb{C})$ vara underrummet som spänns upp av basfunktionerna $\phi_0(x) = 1$ och $\phi_1(x) = x^2$. Hitta den funktion $f \in V$ som minimerar

$$\|\cos(x) - f(x)\|.$$

¹Om man inte kommer ihåg formeln (vilket jag själv inte gjorde) så är det enkelt att härleda den. Vi beräknar helt enkelt normen i kvadrat av $\cos(\lambda_n)$ i $L^2([0,1])$ enligt $\int_0^1 \cos^2(\lambda_n x) dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2\lambda_n x)}{4\lambda_n} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$ för $n \geq 1$ vilket förklarar att vi multiplicerar integralen med 2.

Lösningsförslag fråga 2: Formeln för minsta kvadratanpassningen ger att lösningen är

$$\frac{\langle \cos(x), \hat{\phi}_0(x) \rangle}{\|\hat{\phi}_0\|^2} \hat{\phi}_0 + \frac{\langle \cos(x), \hat{\phi}_1(x) \rangle}{\|\hat{\phi}_1\|^2} \hat{\phi}_1, \quad (3)$$

om $\hat{\phi}_0$ och $\hat{\phi}_1$ är orthogonala vektorer som spänner upp V .

För att använda formeln så måste vi hitta en orthogonal bas för V vi väljer den basen $\hat{\phi}_0(x) = 1$ och (enl. Gram-Schmidt)

$$\hat{\phi}_1(x) = x^2 - \frac{1}{\int_{-1}^1 |\hat{\phi}_0|^2 dx} \int_{-1}^1 x^2 \hat{\phi}_0(x) dx \hat{\phi}_0(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

Insatt i (3) ger detta följande **Svar:** Den bästa approximationen av $\cos(x)$ i V ges av

$$\begin{aligned} \frac{1}{\int_{-1}^1 1 dx} \left(\int_{-1}^1 \cos(x) dx \right) + \frac{1}{\int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx} \left(\int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \cos(x) dx \right) \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \\ = \sin(1) + \left(-15 \sin(1) + \frac{45}{2} \cos(1)\right) \left(x^2 - \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

3. Hitta en lösning till följande integralekvation

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-t) e^{-|t|} dt = \frac{1}{\cosh(x)}. \quad (4)$$

[4 poäng]

Lösningsförslag fråga 3: För enkelhetsskull så betecknar vi $g(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$.

Vi tar Fouriertransformationen av båda led, och använder faltningsformeln, vilket ger

$$\hat{f}(\omega) \mathcal{F}(e^{-|t|})(\omega) = \hat{g}(\omega).$$

Vi måste beräkna

$$\mathcal{F}(e^{-|t|})(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|} e^{-i\omega t} dt = \int_0^\infty e^{-t} e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^0 e^t e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{1+i\omega} + \frac{1}{1-i\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

Det följer att

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1+\omega^2}{2} \hat{g}(\omega) = \frac{1}{2} (\hat{g}(\omega) - (i\omega)^2 \hat{g}(\omega)). \quad (5)$$

Eftersom² $\mathcal{F}(g'(x))(\omega) = i\omega \mathcal{F}(g)(\omega)$ så får vi att $-(i\omega)^2 \hat{g}(\omega) = -\mathcal{F}(g'')(\omega)$. Om vi använder detta i (5) så får vi att

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{2} \mathcal{F}(g - g'')(\omega).$$

Inverstransformationen och en enkel beräkning ger att

$$f(x) = \frac{1}{2} (g(x) - g''(x)) = \frac{1}{\cosh^3(x)}.$$

4 a). Beräkna Laplacetransformen av $\cos(ax)$:

$$\mathcal{L}(\cos(ax))(s) = \int_0^\infty \cos(ax) e^{-sx} dx.$$

[1 poäng]

b) Använd Laplacetransformen för att lösa begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} y''(x) + 4y(x) &= 1 \quad \text{för } x > 0 \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = 1. \end{aligned} \quad (6)$$

[3 poäng]

²Även den här formeln är lätt att härleda eftersom en partiell integration ger $\mathcal{F}(g') = \int_{\mathbb{R}} g'(x) e^{-i\omega x} dx = i\omega \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-i\omega x} dx = i\omega \mathcal{F}(g)(\omega)$.

Lösningsförslag Fråga 4. a) Vi använder Eulers formel:

$$\cos(ax) = \frac{e^{iax} + e^{-iax}}{2}$$

för att beräkna

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\cos(ax))(s) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{(ia-s)x} dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-(ia+s)x} dx = \\ &= \frac{-1}{2(ia-s)} + \frac{1}{2(ia+s)} = \frac{s}{s^2 + a^2}\end{aligned}$$

vilket är vårt svar på delfråga a.

b) Från den givna formeln för Laplacetransformen av en derivata samt initialdata får vi att

$$\mathcal{L}(y'') = s\mathcal{L}(y')(s) - y'(0) = s^2\tilde{y}(s) - sy(0) - y'(0) = s^2\tilde{y}(s) - 1.$$

Vidare så är

$$\mathcal{L}(1)(s) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-sx} dx = \frac{1}{s}. \quad (7)$$

Om vi laplacetransformerar båda led så får vi, efter att använda ekvationerna ovan, att

$$(s^2 + 4)\tilde{y}(s) = \frac{1}{s} + 1.$$

Vi kan skriva om detta som

$$\tilde{y}(s) = \frac{1}{s^2 + 4} + \frac{1}{s(s^2 + 4)} = \frac{1}{s^2 + 4} + \frac{1}{4s} - \frac{1}{4} \frac{s}{s^2 + 4}.$$

Från deluppgift a) och den givna formeln för $\mathcal{L}(\sin(x))$ samt (7) så får vi att

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{2} \sin(2x)\right)(s) + \mathcal{L}(1/4)(s) + \mathcal{L}\left(-\frac{1}{4} \cos(2x)\right)(s) = \frac{1}{s^2 + 4} + \frac{1}{4s} - \frac{1}{4} \frac{s}{s^2 + 4}.$$

Eftersom Laplacetransformen är unik så följer det att

$$y(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) - \frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{1}{4}.$$

Del 2.

5. Låt f vara en likformigt kontinuerlig funktion på enhetscirkeln $\mathbb{T}$; d.v.s. för varje $\epsilon > 0$ så existerar det ett $\delta > 0$ så att för alla $x, y \in \mathbb{T}$ så att $|x - y| < \delta$ kommer $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Visa att det, för varje $\epsilon > 0$, finns ett trigonometriskt polynom

$$p_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

så att

$$|f(x) - p_N(x)| < \epsilon \text{ för alla } x \in \mathbb{T}.$$

Du får använda att

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n(x) = \frac{1}{2\pi(N+1)} \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}(N+1)t)}{\sin(\frac{1}{2}t)} \right)^2,$$

där $D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikt}$ samt att

$$F_N(t) \geq 0, \quad (8)$$

$$\int_{\mathbb{T}} F_N(t) dt = 1, \quad (9)$$

och att för alla $\delta > 0$ och $x \in \mathbb{T}$ så kommer

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{t \in \mathbb{T}, |t-x| > \delta} F_N(t-x) dt = 0 \quad (10)$$

utan bevis.

[4 poäng]

Lösningssförslag fråga 5. Vi börjar med att observera att

$$\begin{aligned} f * F_N(x) &= \int_{\mathbb{T}} f(t) F_N(t-x) dt = \frac{1}{2\pi(N+1)} \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{im(t-x)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi(N+1)} \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n \left(\int_{\mathbb{T}} f(t) e^{im(t)} dt \right) e^{-imx}, \end{aligned}$$

d.v.s. $f * F_N(x)$ är ett trigonometriskt polynom. Det räcker därför att visa att, givet $\epsilon > 0$ så finns det ett $N > 0$ så att

$$|f * F_N(x) - f(x)| < \epsilon \quad (11)$$

för alla $x \in \mathbb{T}$.

För att visa (11) så använder vi först likformig kontinuitet av f för att välja ett $\delta > 0$ så att

$$|x - t| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Det följer att

$$\begin{aligned} |f * F_N(x) - f(x)| &= \{ \text{enl. (9)} \} = \\ &= \left| \int_{\mathbb{T}} F_N(t-x)(f(t) - f(x)) dt \right| \leq \\ &\leq \int_{|x-t| < \delta} F_N(t-x)|f(t) - f(x)| dt + 2 \sup_{x \in \mathbb{T}} |f(t)| \int_{\mathbb{T}, |x-t| \geq \delta} F_N(t-x) dt = I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (12)$$

där vi också har använt triangelolikheten, den givna olikheten (8) ($F_N \geq 0$) samt elementära olikheter för integralen.³

Vi kan använda vårt val av δ för att skatta

$$I_1 \leq \sup_{|x-t| < \delta} |f(t) - f(x)| \int_{\mathbb{T}} F_N(t-x) dt \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad (13)$$

eftersom $F_N \geq 0$ och integralen av F_N är 1 (d.v.s. den givna likheten (9)). För att skatta I_2 så observerar vi att $M = \sup |f(t)|$ existerar och är ändlig eftersom f är kontinuerlig så vi kan använda (10) för att härleda

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_2 = 2M \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}, |x-t| \geq \delta} F_N(t-x) dt = 0.$$

Det följer att om N är tillräckligt stort så kommer

$$I_2 < \frac{\epsilon}{2}. \quad (14)$$

Om vi väljer N så stort att (14) håller så kommer (13), (14) insatta i (12) att ge

$$|f * F_N(x) - f(x)| < \epsilon \text{ för alla } x \in \mathbb{T}.$$

Detta är vad vi skulle bevisa.

6. Härled en Lösningssformel för lösningen $u(x, t)$ till följande ekvationer:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} u(x-y, t) dy \quad \text{för } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned} \quad (15)$$

där $f \in \mathcal{S}$ är en given funktion i Schwarzklassen.

Din härledning får vara informell; d.v.s. du behöver inte visa att integraler i lösningen är konvergenta, att det är tillåtet att derivata under integraler et.c. Ditt svar för innehålla olösta integraler, elementära funktioner (sin, cos exponential-funktionen et.c.) och funktionen f .

[4 poäng]

Lösningssförslag fråga 6. Vi gör en Fouriertransformation med avseende på x -variabeln och får

$$\frac{\partial \hat{u}(\omega, t)}{\partial t} = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \hat{u}(\omega, t), \quad (16)$$

där vi också använde faltningsformeln för Fouriertransformen och den givna formeln $\mathcal{F}(e^{-y^2})$.

Initialdata ger också att

$$\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega). \quad (17)$$

³Specifikt att $\left| \int_{\mathbb{T}} g(t) dt \right| \leq \int_{\mathbb{T}} |g(t)| dt$ samt att $\int_{\mathbb{T}} g(t) h(t) dt \leq \sup |h(t)| \int_{\mathbb{T}} g(t) dt$ för $g(t) \geq 0$.

Ekvation (16) och likheten (17) är en ordinär differentialekvation för varje fixt ω . Genom att lösa differentialekvationen så får vi

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega) e^{-\sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}} t}.$$

Om vi gör en inverstransformation av båda led och använder falttningsformeln så får vi följande lösningsformel

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} f * K_t(x)$$

där

$$K_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}} t} d\omega.$$

Formler.

Följande formler är tillåtna att använda utan bevis i era lösningar:

1. $\mathcal{L}(f(t))(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-ts} dt$
2. $\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0)$
3. $\mathcal{L}(\sin(ax))(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$
4. $\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\omega} dt$
5. $\mathcal{F}(e^{-t^2})(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$
6. $\mathcal{F}(1/\cosh(t))(\omega) = \frac{\pi}{\cosh(\pi\omega/2)}$
7. Om $a(n) = \alpha^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ så är z -transformen av $a(n)$ lika med $A(z) = \frac{z}{z-\alpha}$
8. Låt $\theta(n-k) = \begin{cases} 0 & \text{om } 0 \leq n \leq k-1 \\ 1 & \text{om } k \leq n \end{cases}$ då är z -transformen av $\alpha^n \theta(n-k)$ lika med $\frac{z^{k-1}}{z-\alpha}$.
9. $\int x^2 \cos(x) dx = -2 \sin(x) + 2x \cos(x) + x^2 \sin(x).$