

Tentamen SF1683/SF1632 11 Januari 2019

Tentamen består av sex uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.

Preliminära betygsgränser: A–21 poäng, B–19, C–16, D–13, E–11, Fx–10.

Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx, information om detta publiceras på Kurshemsidan för SF1683.

Inga hjälpmedel är tillåtna vid tentamen.

På skrivningens baksida finns det dock ett antal formler som ni får använda.

OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

Del 1.

1. Lös följande partiella differentialekvation med hjälp av variabelseparation

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} && \text{för } x \in (0,1) \text{ och } t > 0 \\ -\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= u(1,t) = 0 && \text{för } t > 0 \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned} \tag{1}$$

där

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{för } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{för } x = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{för } \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

Du behöver inte visa att din Fourierserie konvergerar då $t = 0$.

[4 poäng]

2. Låt $V \subset L^2([-1,1]; \mathbb{C})$ vara underrummet som spänns upp av basfunktionerna $\phi_0(x) = 1$ och $\phi_1(x) = x^2$. Hitta den funktion $f \in V$ som minimerar

$$\|\cos(x) - f(x)\|.$$

[4 poäng]

3. Hitta en lösning till följande integralekvation

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-t)e^{-|t|}dt = \frac{1}{\cosh(x)}. \tag{2}$$

[4 poäng]

4 a). Beräkna Laplacetransformen av $\cos(ax)$:

$$\mathcal{L}(\cos(ax))(s) = \int_0^\infty \cos(ax)e^{-sx}dx.$$

[1 poäng]

b) Använd Laplacetransformen för att lösa begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} y''(x) + 4y(x) &= 1 && \text{för } x > 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) &= 1. \end{aligned} \tag{3}$$

[3 poäng]

Vänd!

Del 2.

5. Låt f vara en likformigt kontinuerlig funktion på enhetscirkeln $\mathbb{T}$; d.v.s. för varje $\epsilon > 0$ så existerar det ett $\delta > 0$ så att för alla $x, y \in \mathbb{T}$ så att $|x - y| < \delta$ kommer $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Visa att det, för varje $\epsilon > 0$, finns ett trigonometriskt polynom

$$p_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

så att

$$|f(x) - p_N(x)| < \epsilon \text{ för alla } x \in \mathbb{T}.$$

Du får använda att

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n(x) = \frac{1}{2\pi(N+1)} \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}(N+1)t)}{\sin(\frac{1}{2}t)} \right)^2,$$

där $D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikt}$ samt att

$$F_N(t) \geq 0, \quad (4)$$

$$\int_{\mathbb{T}} F_N(t) dt = 1, \quad (5)$$

och att för alla $\delta > 0$ och $x \in \mathbb{T}$ så kommer

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{t \in \mathbb{T}, |t-x| > \delta} F_N(t-x) dt = 0 \quad (6)$$

utan bevis.

[4 poäng]

6. Härled en lösningsformel för lösningen $u(x, t)$ till följande ekvationer:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} u(x-y, t) dy \quad \text{för } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned} \quad (7)$$

där $f \in \mathcal{S}$ är en given funktion i Schwarzklassen.

Din härledning får vara informell; d.v.s. du behöver inte visa att integraler i lösningen är konvergenta, att det är tillåtet att derivera under integraler et.c. Ditt svar för innehålla olösta integraler, elementära funktioner (sin, cos exponential-funktionen et.c.) och funktionen f .

[4 poäng]

Formler.

Följande formler är tillåtna att använda utan bevis i era lösningar:

1. $\mathcal{L}(f(t))(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-ts} dt$

2. $\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0)$

3. $\mathcal{L}(\sin(ax))(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$

4. $\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\omega} dt$

5. $\mathcal{F}(e^{-t^2})(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

6. $\mathcal{F}(1/\cosh(t))(\omega) = \frac{\pi}{\cosh(\pi\omega/2)}$

7. Om $a(n) = \alpha^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ så är z -transformen av $a(n)$ lika med $A(z) = \frac{z}{z-\alpha}$

8. Låt $\theta(n-k) = \begin{cases} 0 & \text{om } 0 \leq n \leq k-1 \\ 1 & \text{om } k \leq n \end{cases}$ då är z -transformen av $\alpha^n \theta(n-k)$ lika med $\frac{z^{k-1}}{z-\alpha}$.

9. $\int x^2 \cos(x) dx = -2 \sin(x) + 2x \cos(x) + x^2 \sin(x).$

Lycka Till!