



## TENTAMEN I CM1000 – DISKRET MATEMATIK – DEN 13 JANUARI 2021

*Tillåtna hjälpmedel:* Ett A4-papper med egna *handskrivna* anteckningar, anteckningar på båda sidorna är tillåtet. Inga datorutskriftar och inga miniräknare. Förstås inga smart watches eller andra elektroniska kommunikationsmedel. (I samband med pandemins särskilda omständigheter får ni dock ringa läraren på mobiltelefonen men ni får inte ringa eller kommunicera med någon annan.)

*Skrivtid:* Skrivtiden är 5 timmar, med början 14.00. Dock så sker inlämningen digitalt och för att hårbärgera och lösa eventuella tekniska problem adderas en timme så att inlämning kan ske fram till och med 20.00. Det betyder inte att ni har extra skrivtid, den pålagda tiden ska användas till att ladda upp filer i den Canvas-quiz som skapats för tentan. Om ni gör detta under tentamens gång eller efter ni skrivit klart hela tentan är dock ert val. Observera att Canvas själv INTE kommer ge några påminnelser om detta, på Canvas ser det ut som om inlämningstiden är mycket senare, men det ska ni bortse ifrån. Skrivtiden *är* 5 timmar med inlämning fram till och med 20.00. Planera dock arbetet så att ni inte behandlar några uppgifter efter kl 19.30 utan säkert efter detta klockslag endast ägnar er åt uppladdning av era lösningar. För de med extra skrivtid kan man lämna in fram till och med 23.00 (och efter 22.30 ska ni inte ägna er åt något annat än att ladda upp filer). Det är dock *starkt* rekommenderat att ni lämnar in i mycket god tid eftersom gränsen 20.00 (respektive 23.00) är mycket skarp och kommer att sättas av systemet själv, inte av er klocka, inte av fröken ur, utan av *Canvas*. Så för att vara på säkra sidan, lämna in i ohyggligt god tid. Lösningar inlämnade för sent rättas inte.

*Varning:* När ni trycker på "Lämna in"/"Submit" så kan inga mer uppgifter laddas upp, var därför helt säker på att du laddat upp ALLT som ska lämnas in innan du trycker på "Lämna in"/"Submit".

*Teknisk support:* Om det skulle finnas tekniska problem (vilka som helst) som förhindrar inlämningen eller gör det svårt på något vis, *måste* ni kontakta mig i skrivningens tillhörande zoommöte. Det är endast i zoommötet som vi kan lösa problem, troligen genom att något slags alternativ inlämningsprocedur vidtas. Ni kan *inte* på egen hand besluta er för att eposta era lösningar.

## DELAR

Tentamen har tre delar. Den första delen – Del I – består av nio problem som svarar mot kursens nio delområden. De problem som svarar mot delområden som tidigare är avklarade från kursens kontrollskrivningar behöver inte lösas. För lägsta godkända betyg (E) måste alla nio delområden vara avklarade. Den andra delen – Del II – består av ett problem för betyget C. Om ni uppfyller kraven för betyg E och klarar det problemet uppfyller ni kravet för betyg C. Den sista delen – Del III – består av ett problem för betyget A. Om ni uppfyller kraven för betyg C och klarar det problemet uppfyller ni kraven för betyg A. Betyg B respektive D reserveras för situationer där studenter försökt på högre betyg men inte riktigt nått fram. Ingen poängsättning sker, varje lösning är antingen helt rätt eller helt fel – dock bedöms inte lösningar som har slarvfel i sig som felaktiga om slarvfelet inte ändrar den logiska strukturen på problemställningen. Om ingenting annat sägs i uppgiften krävs *fullständiga* motiveringar för alla lösningar.

## TILLGODORÄKNANDE

Om en uppgift som tillhör ett högre betyg löses korrekt och den uppgiften kan sägas *täcka* ett av de grundläggande nio delområdena, så kan lösningen av den uppgiften tillgodoräknas för det grundläggande delområde som täcks av högrebetygsuppgiften – det delområdet anses då avklarat. Det betyder att om ni misslyckas med en lösning av ett problem i Del I så kan ni ändå få det området avklarat om ni klarar av att lösa en motsvarande högrebetygsuppgift. I alla uppgifter för högre betyg anges vilken uppgift i Del I som de kan täcka. Om ni känner er osäkra på er lösning av någon uppgift i Del I kan ni också ge en lösning för en högrebetygsuppgift som täcker den uppgift ni är osäkra på.

## Del I

**1. Logik.** Formulera och bevisa en av DeMorgans lagar för tre utsagor,  $p, q, r$ . (Alltså  $\neg(p \vee q \vee r) \Leftrightarrow \dots$  med mera.) Sanningstabell får inte användas men du får använda DeMorgans lag för två utsagor.

**2. Mängdlära.** Inför operationen  $E \oplus F = (E - F) \cup (F - E)$  och sätt  $A = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$ ,  $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 9\}$  respektive  $C = \{1, 2, 5, 6, 7, 10\}$ . Beräkna  $|(A \cap B) \cup (B \cap C) \times (A \oplus B \oplus C)|$ .

**3. Funktioner.** Beteckna med  $M_{2 \times 2}$  mängden av alla  $2 \times 2$ -matriser, alltså

$$M_{2 \times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

På denna mängd inför vi det så kallade *spåret* som är en funktion  $sp : M_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$  som är definierad som summan av elementen i argumentets diagonal, det vill säga:

$$sp \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d.$$

(a) Visa att  $sp$  inte är en injektiv funktion, men att den är surjektiv.

(b) Visa att restriktionen av  $sp$  till mängden av alla symmetriska matriser uppfyller

$$sp(AB) = sp(BA).$$

(Här betecknas  $A, B$  två symmetriska matriser, som alltså uppfyller  $A = A^t$  och  $B = B^t$ .)

*Ledning:* En godtycklig symmetrisk  $2 \times 2$ -matris kan betecknas med  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ .

**4. Inledande talteori.** Om  $n$  inte är delbart med 7, visa att  $n^6 \equiv 1 \pmod{7}$ .

**5. Relationer.** I den här uppgiften är det särskilt viktigt att du redovisar alla detaljer. Låt mängden  $A$  vara given som mängden av alla vektorer i  $\mathbb{R}^2$ , utom nollvektorn  $(0, 0)$ . Definiera relationen  $\mathcal{R}$  på  $A$  genom

$$u\mathcal{R}v \Leftrightarrow u \cdot v \neq 0.$$

(a) Är  $\mathcal{R}$  reflexiv? Varför, varför inte?

(b) Är  $\mathcal{R}$  symmetrisk? Varför, varför inte?

(c) Är  $\mathcal{R}$  transitiv? Varför, varför inte?

(d) Är  $\mathcal{R}$  en ekvivalensrelation? Varför, varför inte?

(*Ledning:* ” $\cdot$ ” betecknar den vanliga skalärprodukten, det vill säga  $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2$ .)

**6. Fördjupad talteori.** Använd matematisk induktion för att visa olikheten

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$$

för alla positiva heltal  $n = 1, 2, 3, \dots$

*Ledning:* Vid en punkt i räkningarna behöver du kanske övertyga dig om att olikheten

$$2\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t+1}} < 2\sqrt{t+1}$$

gäller för vissa värden på  $t$ . Detta görs enklast genom att skriva om den som  $\frac{1}{2\sqrt{t+1}} < \sqrt{t+1} - \sqrt{t}$  och förlänga båda led med det positiva talet  $\sqrt{t+1} + \sqrt{t}$ . Då är det lättare att se att olikheten är uppfylld.

**7. Grafteori.** För alla grafer  $G$  gäller att om  $G$  inte har någon cykel så är antalet hörn större än antalet kanter. Gäller omvändningen, det vill säga gäller det att om en graf  $G$  har antalet hörn större än antalet kanter så kan den inte heller ha någon cykel? Ja, eller nej? Bevisa ditt påstående.

**8. Kombinatorik.** Hur många sexsiffriga tal kan bildas med siffrorna 0, 0, 1, 1, 2 och 2? (Observera att ett sexsiffrigt tal inte kan starta med 0.)

**9. Sannolikhetslära.** Det finns vetenskapliga studier som tyder på att utgången av sjukdomsförloppet vid COVID-19 kan vara sämre vid D-vitaminbrist. Andra studier visar också att D-vitaminbrist är olika vanligt i olika folkgrupper och i USA kan befolkningen grovt delas in i följande folkgrupper: vita (69%), latinamerikaner (18%) och svarta (13%). Av USAs svarta befolkning har 82% D-vitaminbrist medan 70% av latinamerikanerna respektive 42% av de vita har D-vitaminbrist.

(a) Beräkna sannolikheten att en slumpvis vald person från den totala populationen (USA) har D-vitaminbrist.

(b) Beräkna sannolikheten att en person som har D-vitaminbrist i USA är svart.

Du behöver *egentligen inte* räkna ut exakta numeriska värden som svar, det räcker med att ange numeriska uttryck för de korrekta numeriska värdena – även om du självklart måste motivera varför uttrycken ser ut som de gör. Miniräknare är ju inte ett tillåtet hjälpmedel, men svara på ett sätt som gör att man lätt kan knappa fram det numeriska värdet med en miniräknare.

## Del II

**10. För betyg C.** Kan också täcka delområdet inledande talteori.

(a) Finn ett heltal  $x$  sådant att

$$x \equiv 0 \pmod{13} \quad \text{och} \quad x \equiv 1 \pmod{17}.$$

(b) Om  $p, q$  är två skilda primtal, kan vi alltid hitta ett  $x$  med

$$x \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{och} \quad x \equiv 1 \pmod{q}?$$

Varför? Varför inte? Bevisa ditt påstående.

## Del III

**11. För betyg A.** Kan också täcka delområdet relationer. Låt mängden  $A = \{a, b, c\}$  vara given. Vi ska studera (binära) relationer på  $A$ . De tre egenskaperna *reflexivitet*, *symmetri* och *transitivitet* ska studeras. En relation på  $A$  kan definieras med en matris av nedanstående slag:

|     | $a$ | $b$ | $c$ |
|-----|-----|-----|-----|
| $a$ | x   |     | x   |
| $b$ | x   | x   | x   |
| $c$ |     |     | x   |

där kryss används för att ange om element är relaterade eller inte. Vi antar konventionen att varje element  $(a, b, c)$  får varsinn rad och varsinn kolonn och omm det finns ett kryss på den rad som ett element står på så är elementet relaterat till det element i vars kolonn krysset står. Med denna konvention definierar matrisen ovan relationen

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, c)\}.$$

Vi ser till exempel att  $a\mathcal{R}a$  eftersom vi har ett kryss i rutan längst upp till vänster, det är raden för  $a$  och kolonnen för  $a$ . Vi ser också att  $a\mathcal{R}c$  eftersom vi har ett kryss längst till upp till höger, alltså återigen på raden för  $a$  men kolonnen för  $c$ . Vi kan också avläsa en egenskap som den här relationen har: eftersom raden för  $b$  är full med kryss, så måste  $b$  vara relaterat till samtliga element (inklusive sig själv) i  $A$ . ( $b\mathcal{R}a$ ,  $b\mathcal{R}b$  och  $b\mathcal{R}c$ )

En relation kan som bekant ha egenskaperna *reflexivitet*, *symmetri* och *transitivitet*. Rita 8 diagram (av ovanstående typ) för 8 olika relationer som tillsammans har alla möjliga 8 kombinationer av dessa egenskaper, alltså de ska ha eller inte ha varje egenskap. Eftersom en relation kan ha eller inte ha en egenskap och det är tre egenskaper blir det totalt 8 möjligheter. Ange klart och tydligt vilken kombination av egenskaper varje relation har genom att beteckna diagrammen med bokstavskombinationer: "R-T" betyder "reflexiv, inte symmetrisk, men transitiv". Du ska då alltså ange matriser för relationer som beskrivs av bokstavkombinationerna "----" (ingen egenskap), "R--" (reflexiv, inte symmetrisk, inte transitiv), "-S-", "--T", "RS-", "-ST", "R-T" och "RST". För att få godkänt på uppgiften ska minst 7 diagram vara korrekta. (Det är ok att missa ett alltså.)