



KONTROLLSKRIVNING 4 – HT2020

Tillåtna hjälpmedel är ett A4-ark med egna anteckningar från kursen. Anteckningar får finnas på båda sidor av arket. Inlämning sker i form av fotograferade handskrivna lösningar i aktuell Quiz på kurswebben. Om ni av någon anledning inte kan scanna in en fil och måste mejla den till mig, ladda istället upp en platsmarkörsfil och mejla er lösning till mig. Jag kan inte rätta uppgifter som inte har uppladdade bildfiler och observera att om ni trycker på "skicka in"/"submit" så kan ni inte längre lämna in några lösningar. Om ni mejlar en lösning till mig måste också detta föregås av en diskussion med mig (ansvarig lärare) på skrivningens zoommöte.

Skrivtiden är de normala 1 timme och 45 minuter + 25-30 minuter extra tid för bildhantering & uppladdning, därför tillgängliggörs skrivningen 10-15 minuter innan 13.00 och sista ordinarie inlämningstid är 15.00. Observera att det som gäller är systemets tidsstämplar, så för att vara absolut säker är det bäst att lämna in senast några minuter innan 15.00. Några har för små marginaler här och om någon lösning kommer in 15.01 eller senare kan jag inte rätta den. Se till att trycka på "Lämna in"/"Submit" gärna i *mycket god tid*, kanske redan då det är 5-10 minuter kvar. Fullständig lösning krävs för att en uppgift ska anses korrekt behandlad.

Delområdena 2, 3 och 5 har vardera två alternativ kallade 2a, 2b respektive 3a, 3b samt 5a, 5b. För vart och ett av dessa delområden får ni lämna in högst ett lösningsförslag, dvs endast a-uppgiften eller b-uppgiften, inte båda! Om ni lämnar in lösningsförslag till både a- och b-uppgiften för något av dessa delområden rättas *ingen* av uppgifterna hörande till det delområdet!

Uppgift 1. Logik. Betrakta nedanstående härledning. Den är antingen korrekt eller felaktig.

1. $p \rightarrow q$
2. $q \rightarrow r$
3. $\neg r \vee p$
4. $q \vee r$

- $\therefore p$

Om den är korrekt, visa hur slutsatsen följer av premisserna antingen med hjälp av en sanningstabell eller genom att ange i detalj hur slutsatsen kan dras genom att gå igenom steg för steg (med angivande av alla använda slutledningsregler) utgående från premisserna. Om den inte är korrekt, ange en tilldelning av sanningsvärden till p, q, r som uppfyller premisserna men inte slutsatsen.

Uppgift 2a. Mängdlära – alternativ 1. Låt A, B, C beteckna tre mängder. Visa att utsagorna $A \cap B \subset C^c$, $B \cap C \subset A^c$ och $A \cap C \subset B^c$ i själva verket är ekvivalenta. Du får inte använda Venndiagram för detta bevis.

Uppgift 2b. Mängdlära – alternativ 2. Avgör om $(A \cup B) - C \subset B \wedge A \cap C \subset B \Rightarrow A \subset B$ är sant för alla mängder A, B, C eller inte. Om det är sant, bevisa det, utan att använda Venndiagram. Om det är falskt, ge exempel på tre mängder A, B, C då vi inte har $(A \cup B) - C \subset B \wedge A \cap C \subset B \Rightarrow A \subset B$.

Uppgift 3a. Funktioner – alternativ 1. Betrakta mängden $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Ange alla funktioner $g : A \rightarrow A$ som uppfyller båda kraven:

1. $g(1) = 1$
2. $g \circ g = \iota_A$.

Ledning: Fundera på de olika fallen $g = \iota_A$ och $g \neq \iota_A$.

Uppgift 3b. Funktioner – alternativ 2. Bevisa att den enda inverterbara funktionen $f : A \rightarrow A$ som uppfyller $f \circ f = f$ är $f = \iota$.

Uppgift 4. Inledande talteori. Om talet n är udda, bevisa att $24|n^3 - n$.

Uppgift 5a. Relationer – alternativ 1. Definiera relationen $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}$ genom

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \equiv y^2 + 3 \pmod{4}.$$

Visa att denna relation inte är reflexiv, inte är symmetrisk, inte är antisymmetrisk och inte heller transitiv.

Uppgift 5b. Relationer – alternativ 2. Betrakta U som är mängden av alla vektorer med två komponenter, alltså

$$U = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

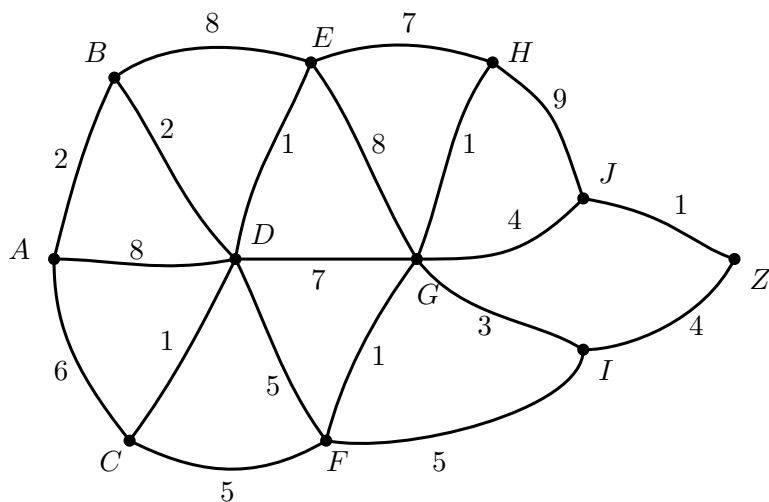
Definiera relationen $\mathcal{R}$ på U genom $u\mathcal{R}v \Leftrightarrow (u + v) \cdot (u - v) = 0$ där $\cdot$ betecknar skalärprodukten på U , det vill säga om $u_1 = (x_1, y_1)$ och $u_2 = (x_2, y_2)$ så är $u_1 \cdot u_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2$ (den vanliga skalärprodukten alltså). Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation.

Uppgift 6. Fördjupad talteori. Använd matematisk induktion för att bevisa summaformeln

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

för alla positiva heltal $n = 1, 2, 3, \dots$

Uppgift 7. Grafteori. Finn ett minsta uppspännande träd för följande graf och ange dess vikt.



Uppgift 8. Kombinatorik. I en projektgrupp finns 5 studenter som ska arbeta med två problem, vi kallar dem A och B . På grund av problemens natur vill projektledaren att flera studenter löser samma problem men presenterar oberoende lösningar. Det är ok att en student tar sig an båda problemen. Om vi säger att en arbetsfördelning består i att vi bestämmer vilka studenter som ska arbeta med vilket (eller vilka) problem, hur många arbetsfördelningar finns det då om vi vill att precis 4 studenter ska arbeta med problem A och precis 3 ska arbeta med problem B ? (Det är faktiskt också ok att en student inte arbetar med något problem alls – kanske den studenten arbetat med två problem i ett tidigare projekt.)

Uppgift 9. Sannolikhetslära. Tre sexsidiga tärningar kastas. Beräkna sannolikheten att utfallet blir

- (a) Samma poängtal på alla tärningar.
- (b) Samma poängtal på precis två tärningar.
- (c) Olika poängtal på alla tärningar.