# Kontroll av facit, kap 1, 2, 3, 5, 6

**Kap 1**
1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10
Blandade övningar 1 - 17

**Kap 2**
2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12
Blandade övningar 1 - 10

**Kap 3**
3.1, 3.2, 3.3
Blandade övningar 1 - 10

**Kap 5**
5.1, 5.2
Blandade övningar 1 - 9

**Kap 6**
6.2, 6.3, 6.4
Blandade övningar 1 - 9

## Kap 1

**1.1.1.** b. är inte en utsaga.

**1.3.1.** Alla utsagor är sanna.

**1.5.1.** Här ska egentligen stå $u_2 \to u_3$. Vi kan också bilda implikationerna $u_1 \to u_3$, $u_1 \to u_2$, $u_2 \to u_1$, $u_2 \to u_4$, $u_3 \to u_1$, $u_3 \to u_2$, $u_3 \to u_4$, $u_4 \to u_1$, $u_4 \to u_3$. Vi avstår från att formulera dem. Hur är det med $u_1 \to u_1$, $u_2 \to u_2$, $u_3 \to u_3$ och $u_4 \to u_4$?

**1.7.6.** Kolumnen för $\neg r$ är felaktig. Nedan följer en rättad tabell.

| $p$ | $q$ | $r$ | $s$ | $\neg r$ | $\neg r \vee s$ | $q \to (\neg r \vee s)$ | $p \wedge (q \to (\neg r \vee s))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| S | S | S | S | F | S | S | S |
| S | S | S | F | F | F | F | F |
| S | S | F | S | S | S | S | S |
| S | S | F | F | S | S | S | S |
| S | F | S | S | F | S | S | S |
| S | F | S | F | F | F | S | S |
| S | F | F | S | S | S | S | S |
| S | F | F | F | S | S | S | S |
| F | S | S | S | F | S | S | F |
| F | S | S | F | F | F | F | F |
| F | S | F | S | S | S | S | F |
| F | S | F | F | S | S | S | F |
| F | F | S | S | F | S | S | F |
| F | F | S | F | F | F | S | F |
| F | F | F | S | S | S | S | F |
| F | F | F | F | S | S | S | F |

Svar $\longrightarrow$

# Blandade övningar

**1.2.** Svaret är alltså JA.

**1.3.** Det ska stå $p$ överst längst till vänster.

**1.5.** Förklaringen av notationen pqrsprs ges i svaret till uppgiften som kommer efter, alltså 1.6.

**1.6.** Texten ska lyda "slutsatsen $((p\to q)\to(r\wedge\neg s))\vee(\neg p\wedge\neg r) \Rightarrow p\to q$ gäller nu...". Det saknades alltså ordet "gäller" så svaret är att slutsatsen kan dras.

**1.8.** Egentligen bör vi i 16 hänvisa till alla led 10–15 tillsammans med indirekt härledning.

**1.9.** ~~Egentligen måste vi skriva $(p\wedge q)\to r$, uttrycket $p\wedge q\to r$ är inte välformat eftersom vi lika gärna skulle kunna tolka det som $p\wedge(q\to r)$. Men om $(p\wedge q)\to r$ gäller är uppgiften korrekt.~~

**1.10.** ~~Samma problem här, vi måste skriva $p\to(q\vee r)$. Om detta görs genomgående är uppgiften korrekt.~~

**1.11.** Egentligen behöver vi i led 12 referera till alla led 5–11 och indirekt härledning.

**1.12.** Återigen behöver vi skriva $(p\wedge s)\to t$ och inte $p\wedge s\to t$.

1.13. Mycket av beviset bygger på att om $p$ är sann så måste $p \vee q$ vara sann, vad än $q$ är. Därför kan vi säga att

$$\neg s \Rightarrow \neg s \vee \neg r \Rightarrow \neg(s \wedge r).$$

1.14.

1. $p \to q$
2. $\neg r \to \neg q$
3. $\neg(r \wedge u)$
4. $s \to (t \wedge u)$

---

$\therefore \neg(s \wedge p)$

| | | |
|---|---|---|
| 5. | $q \to r$ | (omskrivning av 2) |
| 6. | $\neg r \vee \neg u$ | 3, DeMorgan |
| 7. | $p$ | antagande |
| 8. | $p \to r$ | 1,5, Hypotetisk Syllogism |
| 9. | $r$ | 7,8, Modus Ponens |
| 10. | $\neg u$ | 6,9, Disjunktiv Syllogism |
| 11. | $\neg u \vee \neg t$ | 10, konjunktiv addition |
| 12. | $\neg(u \wedge t)$ | 11, DeMorgan |
| 13. | $\neg s$ | 12, 4, Modus Tollens |
| 14. | $p \to \neg s$ | 7-13 hypotetisk härledning |
| 15. | $\neg p \vee \neg s$ | Omskrivning av 14 |
| 16 | $\neg(s \wedge p)$ | 15, DeMorgan. |

Slutsatsen stämmer.

1.15.

1. $p \to q$
2. $\neg r \to \neg q$
3. $\neg (r \wedge u)$
4. $s \to (t \wedge u)$

---

$\therefore t$

Prova tilldelningen $t$ = falsk, $s$ = falsk
$u$ = falsk, $p$ = falsk, $r$ = sann. Då är alla premisser uppfyllda, men $t$ = slutsatsen är falsk. Alltså fungerar inte denna slutledning.

1.16.

1. $r \to \neg p$
2. $p \vee q$
3. $p \to r$
4. $\neg r \to \neg q$

---

$\therefore q$

5. $q \to r$    4, omskrivning
6. $r$    2,3,5, Dilemma
7. $\neg p$    6,1, Modus Ponens
8. $q$    7,2, Disjunktiv syllogism.

Slutledningen är alltså korrekt.

1.17. Här ska slutsats 8 vara $\neg r \wedge r$ som är en motsägelse och för att dra den slutsatsen hänvisar vi till 5,6,7,8 i motiveringen för slutsats 9.

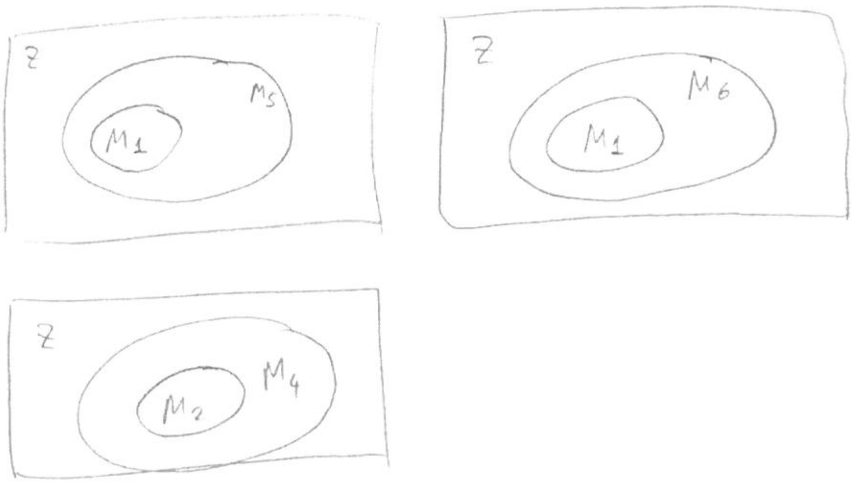
**2.2.1.** $B = M_4 \cup M_1$ gäller bara om $0$ räknas som positivt.

**2.3.1** $M_1 \cap M_3 = \{x \mid x = 2 \cdot m \wedge x = 5 \cdot n,\ n, m \in \mathbb{Z},\ n \geq 0, m \geq 0\}$

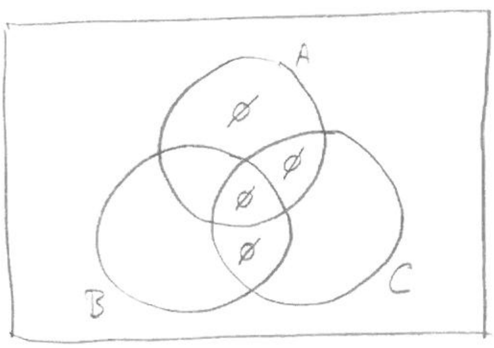
$M_2 \cap M_{10} = \{x \mid x = 2k+1,\ k \geq 0 \wedge x = 5n,\ n \geq 0\}$

Dessa notation är godtagbara men det är också de i originalfacit.

**2.5.1**




**2.9.2** Korrekt Venndiagram som uttrycker $A \subset B$ och $B \cap C = \emptyset$ är




Vi ser här att $A \cap C = \emptyset$ som tydligen följer av $A \subset B$ och $B \cap C = \emptyset$.

2.12.1

- För att få utsaga 2 sann så tar vi bort 1 ur C.
- För att få utsaga 4 sann måste alla element i A tas bort så att bara ett element återstår, och det återstående elementet kan vara 2 eller 4. (Inte 1 eller 3.)
- För att få utsaga 5 sann så måste A bestå av 2 eller 4 (bara) som i förra utsagan, men till detta måste också läggas att C bara består av 1 eller 2. (Alltså de två möjligheterna är $A = \{2\}$ och $C = \{1\}$ eller $A = \{4\}$ och $C = \{2\}$.)

BLANDADE ÖVNINGAR

2.9 Facit saknas, i facit anges i 2.9 svaret till 2.10. Men regeln $A - (A - B) = A \cap B$ är sann som följer av formelmanipulationen

$$A - (A - B) = A \cap (A - B)^c = A \cap (A \cap B^c)^c =$$
$$= A \cap (A^c \cup (B^c)^c) = A \cap (A^c \cup B) =$$
$$= (A \cap A^c) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B.$$

2.10 I facit anges svaret på denna uppgift som 2.9. Vidare anges svaret i facit som om frågan hade gällt regeln $A \cap (B \cup C) = B \cup (A \cap C)$. Det här är en regel som inte stämmer. Däremot stämmer regeln $A \cap (B \cup C) \subset B \cup (A \cap C)$. (Det syns också av Venndiagrammen i facit.)

# KAPITEL 3

**3.18.** $640 = 2^7 \cdot 5^1$

**3.2.1**

56 och 24:

$56 = 2 \cdot 28 = 2 \cdot 4 \cdot 7 = 2^3 \cdot 7$ $\qquad 24 = 2^3 \cdot 3$

Gemensamma delare är

$1, \ 2, \ 4, \ 8$

Största gemensamma delare är 8.

30 och 17:

Gemensamma delare: 1, 2, 5, 10 (största 10.)

18 och 60:

Gemensamma delare: 1, 2, 3, 6 (största 6.)

## BLANDADE ÖVNINGAR

**3.1.**

$R \subset T$ är falsk.

$T \subset R$ är sann.

$T \subset S$ är sann.

$R \cap S = T$ är sann.

**3.6.** Ett litet typografiskt fel finns, stryk "$=2-1$" så är formuleringen ok.

## KAPITEL 5

**5.1.2.** Unionen av alla dessa klasser blir hela $\mathbb{Z}$, alltså mängden av alla heltal. Snittet mellan vilka två som helst av dessa klasser blir $\emptyset$. (Klass = ett annat namn för mängd.)

**5.1.4.** Beviset ska ha tre delar, men det finns bara två delar. Del 2 är dessutom rörigt formulerad, därför ges nya formuleringar av del 2 och del 3 här: (satsen bör också formuleras "heltal $m \geq 1$".)

(ii): Vi ska visa att $cx \equiv cy \pmod n$ för alla heltal $c$ givet att $x \equiv y \pmod n$. Studera därför $cx - cy$, detta är $c \cdot (x-y)$. Men $x \equiv y \pmod n$ ger att det finns ett $k \in \mathbb{Z}$ så att $x - y = k \cdot n$. Detta i sin tur ger $cx - cy = c \cdot (x-y) = c \cdot k \cdot n$, dvs $n \mid cx - cy$ vilket precis betyder $cx \equiv cy \pmod n$, vilket skulle bevisas.

(iii): Vi tar detta bevis i 2 steg, först $x^2 \equiv y^2 \pmod n$. Vi studerar därför $x^2 - y^2$ som enligt konjugatregeln är $(x+y)(x-y)$. Aha! $x \equiv y \pmod n$ ger ju att $x - y = k \cdot n$ för något heltal $k \in \mathbb{Z}$, så $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = (x+y) \cdot k \cdot n$, dvs $n \mid x^2 - y^2$ och alltså $x^2 \equiv y^2 \pmod n$.

Steg 1 är klart. Steg 2 är att göra samma sak för vilka potenser av $x$ och $y$ som helst, alltså $x^m$ och $y^m$. Men det finns en faktoriseringsregel (som ni kanske inte känner till) som lyder

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^3)$$

och allmänt

$$x^m - y^m = (x-y)(x^{m-1} + x^{m-2} \cdot y + \ldots + x \cdot y^{m-2} + y^{m-1})$$

och denna kan användas på samma sätt som...

5.1.4. (fortsättning) ... i steg 2. Prova själv först med $x^3 - y^3$ så kan du också inse att $x^m - y^m$ också fungerar.

5.1.5. $x_1 x_2 \equiv y_1 y_2 \pmod{n}$ är fel. Det ska stå $x_1 y_1 \equiv x_2 y_2 \pmod{n}$. Beviset har dessutom en del typografiska problem så här följer en renoverad variant. (Exemplena efteråt är dock ok.)

Bevis av att $x_1 \equiv x_2 \pmod{n}$ och $y_1 \equiv y_2 \pmod{n} \Rightarrow$ $x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n}$ samt $x_1 \cdot y_1 \equiv x_2 \cdot y_2 \pmod{n}$:

Antag att $x_1 \equiv x_2 \pmod{n}$ och $y_1 \equiv y_2 \pmod{n}$. Detta är ekvivalent med att det finns heltal $h$ och $k$ sådana att $x_1 - x_2 = h \cdot n$ och $y_1 - y_2 = k \cdot n$. Vi studerar nu differensen mellan VL och HL i kongruensen $x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n}$ som ska visas. Den differensen är $(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)$ som kan skrivas om till $(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = h \cdot n + k \cdot n = (h+k) \cdot n$. Men detta visar att $n \mid (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)$ vilket visar att $x_1 + x_2 \equiv y_1 + y_2 \pmod{n}$ och första delen av beviset är klart. För att visa $x_1 y_1 \equiv x_2 y_2 \pmod{n}$ fortsätter vi att använda identiteterna $x_1 - x_2 = h \cdot n$ och $y_1 - y_2 = k \cdot n$ men skriver om dem enligt $x_1 = x_2 + h \cdot n$ respektive $y_1 = y_2 + k \cdot n$. Nu kan vi studera $x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2$ (som vi ska visa är delbart med $n$) och då får vi

$$x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 = (x_2 + h \cdot n)(y_2 + k \cdot n) - x_2 y_2 =$$

$$x_2 y_2 + x_2 \cdot k \cdot n + y_2 \cdot h \cdot n + h \cdot k \cdot n^2 - x_2 y_2 =$$

$$(x_2 \cdot k + y_2 \cdot h + hkn) \cdot n$$

och uppenbarligen gäller $n \mid x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2$ vilket fullbordar beviset.

5.1.9. & 5.1.10 Inte kontrollerade i detalj.

5.2.4. Faktiskt gäller $6 \mid 4^6 - 4$.