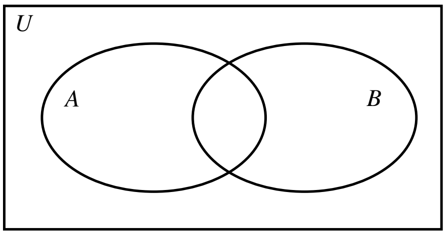
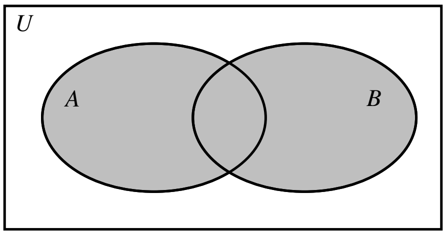
KAPITEL 8 - KOMBINATORIK

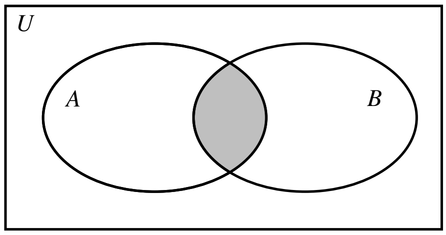
Kombinatorik kan sägas handla om att räkna antal element i mängder. Det som gör det hela lite mer utmanade är då att vi också ska arbeta med komplicerade definitioner av dessa mängder. Hur många tal finns det till exempel i mängden {1,2,3,...,10000} som är jämnt delbara med 15 eller 35? Som vi senare ska se behöver vi ägna en del särskild eftertanke åt olika aspekter för att svaret på en sådan fråga ska bli riktigt.

1. Principen för inklusion och exklusion

Det grundläggande problemet som den här principen befattar sig med är att finna antal element i en union av flera mängder. Vi ska börja med att studera fallet med två mängder som vi kallar A och B. Om vi tar upp dem i ett Venndiagram som illustrerar olika relevanta delmängder så kan det se ut så här:







Till vänster har vi förstås de båda mängderna inritade i ett generellt Venndiagram. I mitten ser vi $A \cup B$ och till höger $A \cap B$. Vi ä nu intresserade av att räkna antalet element i $A \cup B$ och uttrycka det antalet i antalet element i A, B respektive $A \cap B$. Eller, med symboler, vi vill uttrycka $|A \cup B|$ med hjälp av $|A|$, $|B|$ och $|A \cap |$. Vi listar ut den här formeln med hälp av ett exmpel.

Exempel: Hur många tal finns det i mängden $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ som är antingen jämna eller delbara med 3.

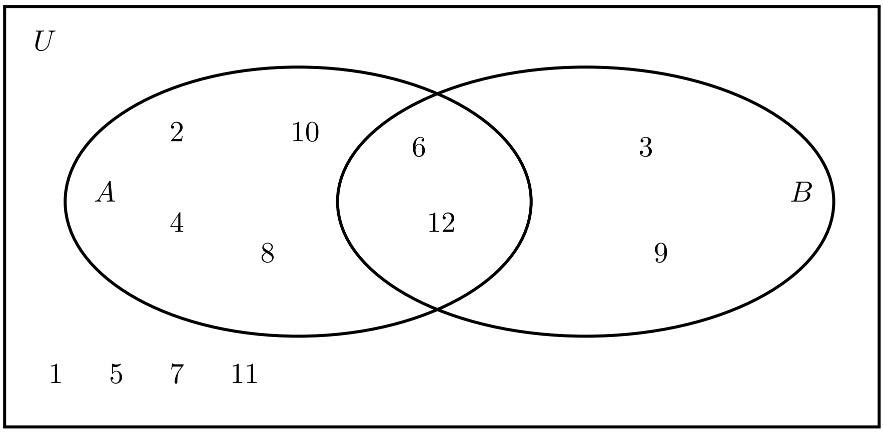
Lösning: Vi har alltså ett universum U beståendes av de första 12 positiva heltalen och vi bildar mängderna

$$A = \{x \in U : x \text{ är jämnt}\} \qquad \text{och} \qquad B = \{x \in U : x \text{ är delbart med } 3\}$$

och vår frågeställning kan nu uttryckas som att vi söker

$$|A \cup B|.$$

Vi kan förstås lätt besvara frågan, vi kan bara konstatera att de tal som är jämna eller delbara med 3 bland de första 10 positiva heltalen är $2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12$, och de är 8 stycken, men låt oss nu se efter hur vi kan använda situationen för att hitta en formel som gäller generellt. Om vi ritar ett Venndiagram och markerar var alla tal i U finns så kan det få följande utseende:



och vi konstaterar att de 8 talen ligger i $A \cup B$ som vi observerat tidigare och att talen $1, 5, 7, 11$ ligger utanför $A \cup B$. Vi konstaterar också att antalet tal i A är $|A| = 6$ eftersom $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ och att antal tal i B är $|B| = 4$ eftersom $B = \{3, 6, 9, 12\}$. Vidare ser vi också att $A \cap B = \{6, 12\}$ så att vi får $|A \cap B| = 2$.

Vå ursprungliga frågeställning var, hur kan $|A \cup B|$ uttryckas i $|A|$, $|B|$ och $|A \cap B|$ och vi frågar oss därför vad det finns för samband mellan talen

$$|A \cup B| = 8, \qquad |A| = 6, \qquad |B| = 4 \qquad \text{och} \qquad |A \cap B| = 2$$

och vi vill veta vad som gäller i det allmänna fallet. Vi kan inse detta ganska lätt om vi gör ett tankeexperiment: Mängderna A och B har två gemensamma element, 6 och 12, men om de inte hade haft några gemensamma element så hade vi enkelt kunnat beräkna $|A \cup B|$ genom att bara bilda $|A| + |B|$. För mängder som inte har gemensamma element har vi alltså formeln

$$A \cup B| = |A| + |B|$$

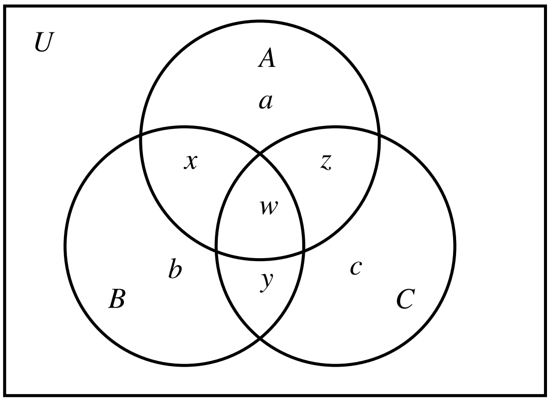
men den formeln stämmer inte för exemplet ovan och kruxet är som vi kan ana de gemensamma elementen. Om vi bildar talet $|A| + |B|$ för mängderna ovan så blir det talet $6 + 4 = 10$ och $|A \cup B|$ är ju 8. Det är 2 för mycket, men dessa extra 2 fås just från de gemensamma elementen 6 och 12. Allmänt måste vi då ha formeln $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ så att vi först bildar uttrycket $|A| + |B|$ men sedan kompenserar genom att dra bort det antal element som räknats dubbelt, det vill säga de i $A \cap B$.

Detta är enklaste formen av principen för inklusion och exklusion som vi formulerar som en sats:

Sats: *Principen för inklusion och exklusion, enklaste formen* Låt A, B vara ändliga mängder. Då gäller

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Vi kan göra en liknande undersökning för att lista ut hur vi finner $|A \cup B \cup C|$ där A, B, C är tre ändliga mängder. Vi ritar först ett speciellt Venndiagram för att hjälpa oss att åskådliggöra vår frågeställning:



I diagrammet har vi ritat in tre mängder A, B, C och introducerat talen a, b, c, x, y, z, w för att beteckna antalet element i varje region av diagrammet. De stora bokstäverna A, B och C används som vanligt för att beteckna mängderna som är involverade, men de små bokstäverna används alltså för att beteckna ett visst antal element i en viss region av diagrammet. Det betyder att a betecknar antalet element som ligger i mängden A men *inte* i någon av mängderna B eller C. Liknande gäller för b och c. Talet x är antalet element som ligger i snittet mellan A och B men ändå *inte* i C. Talen y och z har liknande betydelser och slutligen betecknar w det antal element som ligger i alla tre mängderna (alltså i $A \cap B \cap C$).

Vår grundläggande problemställning är att hitta ett uttryck för $|A \cup B \cup C|$ uttryckt i $|A|$, $|B|$, $|C|$ och kombinationer av snitt tagna mellan dessa mängder, alltså $|A \cap B|$, $|A \cap B \cap C|$ och liknande. Vi kan också använda oss av hur Venndiagrammet är konstruerat för att teckna ett uttryck för $|A \cup B \cup C|$ uttryckt i $a, b, c, \ldots$. Enligt konstruktionen av vår figur har vi helt enkelt

$$|A \cup B \cup C| = a + b + c + x + y + z + w$$

och det följer av precis vad vi menar med bokstäverna a, b, c, x, y, z, w, så det är inget komplicerat resonemang bakom det. Vi kan nu närma oss det här problemet genom att hämta inspiration från den enklare varianten av principen för inklusion och exklusion. Kan kvantiteten

$$q = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$$

vara lika med $|A \cup B \cup C|$? Vi bildar ju det här uttrycket q genom att summera alla element i mängderna A, B, C och kompenserar genom att dra bort det som räknas dubbelt. Ja, vi kan faktiskt kontrollera om det stämmer. Vi vet ju att $|A \cup B \cup C| = a + b + c + x + y + z + w$ och vi vet också att

$$|A| = a + x + w + z, \quad |B| = b + x + w + y \quad \text{och} \quad |C| = c + y + w + z$$

respektive

$$|A \cap B| = x + w, \quad |B \cap C| = y + w, \quad |A \cap C| = z + w \quad \text{och} \quad |A \cap B \cap C| = w,$$

återigen detta följer av att det är precis det här vi menar med bokstäverna a, b, c, x, y, z, w. Så vi kan nu räkna ut var q är. Vi får

$$\begin{aligned} q &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ &= (a + x + w + z) + (b + x + w + y) + (c + y + w + z) - (x + w) - (y + w) - (z + w) \\ &= a + b + c + x + y + z \end{aligned}$$

och det är ju nästan lika med $a + b + c + x + y + z + w$, det enda som saknas är $w = |A \cap B \cap C|$. Vi drar slutsatsen att q nästan är rätt, så lägger vi på $w = |A \cap B \cap C|$ på q så får vi just $|A \cup B \cup C|$. Vi har alltså funnit

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

som då är principen för inklusion och exklusion för tre mängder A, B, C.

Observera att det här inte kan uppfattas som ett riktigt matematiskt bevis, vi har ju bara använt Venndiagram men vi avstå från att ge ett formellt bevis här.

Den allmänna formen för principen för inklusion och exklusion kan formuleras så här: Vi söker en formel för $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$ uttryckt i kombinationer av antal element i snitt mellan de ingående mängderna. Den formeln lyder

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Vi formulerar nu en allmän sats där vi räknar antal element i olika konstellationer av mängder.

Sats: Låt A, B vara delmängder av ett ändligt universum U. Då gäller

(a) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (*principen för inklusion och exklusion i sin enklaste form.*)
(b) $|A \cap B| \leq \min\{|A|, |B|\}$
(c) $|A - B| = |A| - |A \cap B| \geq |A| - |B|$
(d) $|A^c| = |U| - |A|$
(e) $|A \cup B| - |A \cap B| = |A| + |B| - 2|A \cap B| = |A - B| + |B - A|$
(f) $|A \times B| = |A||B|$

Vi lämnar beviset som en övning.

Vi ska nu studera ett exempel som involverar en indirekt tillämpning av principen för inklusion och exklusion.

Exempel: Hur många heltal finns det i mängden $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 10000\}$ som *inte* är delbara med 2, 3, eller 5?

Lösning: Sätt $A = \{x \in \Omega; 2|x\}$, $B = \{x \in \Omega; 3|x\}$ och $C = \{x \in \Omega; 5|x\}$. Vi söker $|\Omega - (A \cup B \cup C)|$. Detta tal kommer att vara $10000 - |A \cup B \cup C|$ varför vi först söker talet $k = |A \cup B \cup C|$. Principen för inklusion och exklusion ger oss

$$k = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

och vi ska studera varje term separat.

Varje term i den här summan har formen

$$|\{x \in \Omega; d|x\}|,$$

där d är en delare som är ett av talen $2, 3, 5, 6, 15, 10, 30$. ($|A \cap B|$ är mängden av alla tal i Ω delbara med 6 (delbara med *både* $2, 3$) och så vidare.)

Låt oss hitta $|\{x \in \Omega; d|x\}|$ för ett generellt d, vilket som helst. Divisionsalgoritmen ger att det existerar ett q sådant att $10000 = q \cdot d + r$, där $0 \leq r < d$. Talen i $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 10000\}$ som är delbara med d är precis talen $1 \cdot d, 2 \cdot d, 3 \cdot d, \ldots, q \cdot d$ och det finns precis q sådana tal. Enligt divisionsalgoritmen så är talet q lika med $10000/d$, där vi använder *heltalsdivision* (resultatet är heltalsdelen av kvoten), det vill säga q är heltalsdelen av $10000/d$. Vi använder denna generella diskussion på termerna ovan och får

$$|A| = 10000/2 = 5000, \quad |B| = 10000/3 = 3333, \quad |C| = 10000/5 = 2000,$$

$$|A \cap B| = 10000/6 = 1666, \quad |B \cap C| = 10000/15 = 666, \quad |B \cap C| = 10000/10 = 1000$$
$$|A \cap B \cap C| = 10000/30 = 333$$

och när vi sätter in dessa tal i formeln för k ovan så ger det

$$k = 5000 + 3333 + 2000 - 1666 - 666 - 1000 + 333 = 7334$$

vilket ger $|\Omega| = 10000 - k = 10000 - 7334 = 2666$.

Övningar

Finan: Example 31.1, Example 31.2.

2. Additions- och multiplikationsprinciperna

Om vi har n stycken parvis disjunkta mängder, det vill säga n mängder utan gemensamma element, så har vi

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1}|A_1 \cap \ldots \cap A_n| = \sum_i |A_i|.$$

Formeln för principen och inklusion och exklusion blir väldigt enkel och det blir bara $\sum_i |A_i|$ kvar eftersom alla snitt är tomma. Den här formeln är ju också väldigt naturlig eftersom $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ är en partitionering av $A_1 \cup \ldots \cup A_n$.

I sannolikhetslära (som ligger till grund för matematisk statistik) talar vi om händelser som enkelt uttryckt är någonting som kan inträffa. Vi kommer i nästa kapitel att studera detta närmare men eftersom exemplena från sannolikhetsläran är användbara i kombinatoriken finns det anledning av föregripa framställningen något.

I sannolikhetslära talar vi som sagt om händelser som kan betraktas som mängder av så kallade *utfall*. I nästa kapitel ska vi associera ett tal till varje händelse som kallas *sannolikhet* som är ett mått på hur stor chans det är att en viss händelse inträffar men det intressanta här är att observera att händelser bara är mängder och utfallen är dessa mängders element och det vi är intresserade av i det här kapitlet är att räkna antalet utfall i händelserna som då helt enkelt blir problemställningen att bestämma hur många element (som då kallas utfall) som det finns i olika mängder (som då kallas händelser).

Vi tar ett exempel för att skapa tydlighet.

Exempel: Kasta två sexsidiga tärningar. En händelse kan beskrivas med orden ”vi får tärningssumman 4”. Den här händelsen kan inträffa på ett antal olika sätt. Varje sätt som en händelse kan inträffa på kallas här då ett *utfall*. Om vi beskriver ett utfall med ett talpar där första komponenten anger det som första tärningen ger och andra komponenten det som andra tärningen ger så kan händelsen som vi beskriver med orden ”vi får tärningssumman 4” uppfattas som mängden av utfallen $(1, 3)$, $(2, 2)$ och $(3, 1)$. Vi beskriver alltså händelsen ”vi får tärningssumman 4” som *mängden*

$$\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}.$$

Det här synsättet att beskriva händelser som mängder av utfall är mycket kraftfullt för vi har då helt plötsligt hela mängdläran till stöd för våra resonemang kring händelser. Vi kan till exempel införa begreppet *oförenliga händelser* som sådana händelser som aldrig kan inträffa tidigare, och efter en stunds eftertanke inser vi att det här egentligen bara är samma begrepp som *disjunkta mängder*. Vi utvidgar ovanstående exempel för att illustrera detta.

Exempel: De två oförenliga händelserna ”vi får tärningsumman 4” och ”vi får tärningssumman 5” kan anges med notationen av utfall i termer av par av tal (som i förra exemplet som följer:

$$\text{Händelsen } \textit{vi får tärningssumman 4} = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$
$$\text{Händelsen } \textit{vi får tärningssumman 5} = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$$

Dessa mängder av par av tal är disjunkta och händelserna är därmed oförenliga. Mängdlärans begrepp om disjunkta mängder blir därför ett sätt att precisera vad det betyder att två händelser aldrig kan inträffa samtidigt.

Med hjälp av det här språkbruket kan vi ställa frågor som ”på hur många olika sätt kan vi få tärningssumman 4 eller 5?” Svaret på det frågan hittar vi genom att konstatera att händelserna ”att få summan 4” och ”att få summan 5” är oförenliga (de kan inte inträffa samtidigt) och vi kan alltså räkna ut antalet sätt att få summan 4 eller 5 genom att *addera* antalet utfall som ger 4 (det var 3 utfall: $(1, 3), (2, 2)$ och $(3, 1)$) med antalet utfall som ger 5 (det var 4 utfall: $(1,4),(2,3),(3,2)$ och $(4,1)$). Vad vi här har är den så kallade *additionsprincipen*:

Sats: *Additionsprincipen* Låt $A_1, A_2, \ldots, A_n$ beteckna n oförenliga händelser och låt $|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_n|$ beteckna antal utfall i vardera händelsen. Det antal sätt som *någon* av händelserna kan inträffa på är då

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k|.$$

I exemplet ovan så hade vi två händelser (vi få summan 4 respektive vi får summan 5) och vi hade då $A_1 = \{(1,3),(2,2),(3,1)\} \Rightarrow |A_1| = 3$ respektive $A_2 = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\} \Rightarrow |A_2| = 4$ och detta gav antalet sätt att 4 eller 5 som

$$|A_1| + |A_2| = 4 + 3 = 7.$$

Additionsprincipen ger oss möjlighet att modellera händelsförlopp på ett sätt. Men vi ska nu rikta vår uppmärksamhet mot ett annat sätt att modellera händelser, nämligen händelser som inträffar efter varandra. Vi antar därför att vi har en situation där en följd av händelser inträffar:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

och vi betecknar antalet sätt som en händelse kan inträffa med $|A_i|$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Vi frågar oss nu: på hur många olika sätt kan *hela* följden av händelser A_i inträffa? Det vill säga, först inträffar A_1, på ett visst antal sätt ($|A_1|$), därefter inträffar A_2 på ett visst antal sätt ($|A_2|$) och så vidare till och med A_n som inträffar på ett visst antal sätt ($|A_n|$).

För att inse antalet sätt som alla händelser kan inträffa kan vi återigen fundera över situationen med tärningarna men nu betrakta processen att kasta de två tärningarna som en process med två deltsteg:

1. Först kastas tärning 1.
2. Sedan kastas tärning 2.

Och så kallar vi kastet av första tärningen för händelse A_1 och kastet av andra tärningen för A_2.

Nu kan vi modellera dessa händelser med ett tal vardera, vi kan alltså uppfattar händelsen A_1 som havandes utfallen $1, 2, 3, 4, 5, 6$, alltså $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och $|A_1| = 6$. Eftersom A_2 beskriver en fullkomligt liknande process (att kasta en tärning) så kan även A_2 fulständigt karakteriseras på samma sätt, det vill säga vi får $A_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och $|A_2| = 6$.

Vi söker nu totala antalet sätt som händelserna A_1 och A_2 kan inträffa i följd. (Alltså först A_1 sedan A_2.) Om vi tänker igenom det här så inser vi att A_1 har 6 utfall. Alla dessa utfall kan inträffa. Men för varje utfall så kan varje utfall i A_2 inträffa. Det betyder att antalet sätt som hela följden av händelser kan inträffa blir kryssprodukten av händelserna eftersom alla utfall i båda händelserna ska kombineras med varandra. Det betyder att total antalet utfall som A_1 följt av A_2 kan inträffa på blir $|A_1 \times A_2|$ och antalet element i denna mängd får vi genom att bilda *produkten* av $|A_1|$ och $|A_2|$, det vill säga $|A_1| \cdot |A_2| = 6 \cdot 6 = 36$. Dettaär den så kallade *multiplikationsregeln* och vi formulerar den för ett allmänt antal händelser:

Sats: *Multiplikationsprincipen* Låt $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vara n händelser och beteckna med $|A_i|$ antal sätt som $|A_i|$ kan inträffa. Då blir totala antalet sätt som följden av händelser $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kan inträffa

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n| = \Pi_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Vi ger inget bevis av detta men studerar exempel på0 hur vi använder multiplikationsregeln i praktiken.

Exempel: På hur många olika sätt kan vi få tärningssumman 5 två gånger i rad då två sexsidiga tärningar kastas?

Lösning: Vi inför händelserna

$$A_1 = \text{vi får tärningssumman 5 vid första kastet}$$

och

$$A_2 = \text{vi får tärningssumman 5 vid andra kastet}$$

och konstaterar att båda dessa händelser är oberoende av varandra, när vi tar upp tärningarna vid andra kastet så finns ingen påverkan från hur det gick i första kastet. Båda händelserna modelleras alltså fullständigt med

$$A_1 = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\} \Rightarrow |A_1| = 4$$

respektive

$$A_2 = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\} \Rightarrow |A_2| = 4$$

varför svaret på vår frågeställning är $|A_1| \cdot |A_2| 4 \cdot 4 = 16$.

Vi använder multiplikationsprincipen i beviset av en mycket viktig sats:

Sats: Låt A vara en ändlig mängd med n element. Då gäller att antalet delmängder till A är 2^n.

Anmärkning: Mängden av alla delmängder är ju det som vi tidigare kallat *potensmängden*, $mathcal P(A)$ så satsen kan formuleras lite med kompakt på följande sätt:

$$|A| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^n.$$

Bevis: Antag att mängden A är given av $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ (vi inför bara en beteckning av de n elementen i A – det är vi fria att göra). Antalet delmängder (alltså $|\mathcal{P}(A)|$) måste då vara lika med antalet sätt att *bilda* delmängder till A. Men denna process, att bilda en delmängd till A kan uppfattas som en process med n delsteg:

Steg 1. ta ett beslut om a_1 ska vara med i delmängden eller inte.
Steg 2. ta ett beslut om a_2 ska vara med i delmängden eller inte.
...
Steg n. ta ett beslut om a_n ska vara med i delmängden eller inte.

men de här n delstegen kan uppfattar som n händelser, $A_1, A_2, \dots, A_n$, där A_1 kan utfalla genom att första elementet a_1 är med eller inte, A_2 kan utfalla genom att andra elementet a_2 är med eller inte och så vidare till och med A_n kan utfalla genom att sista elementet a_n är med eller inte. Att välja en delmängd karakteriseras alltså fullständigt av att händelserna $A_1, A_2, \dots, A_n$ inträffar. Alltså måste antalet delmängder sammanfalla med antalet sätt som denna följd av händelser kan inträffa på. Men eftersom varje händelse kan inträffa på precis 2 sätt (antingen är elementet ifråga med eller inte) så gäller för varje händelse A_i att $|A_i| = 2$. Och vi har alltså

$$\text{Antalet delmängder till } A = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n| = 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$$

och beviset är klart.

Exempel: Antal delmängder av $\{1,2,3\}$ är $2^3 = 8$ och dessa delmängder är

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$$

som som vi ser är 8 till antalet. Potensmängden av $\{1,2,3\}$ är då $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ som vi också sett tidigare i avsnittet om mängder av mängder i kapitlet om mängder.

Exempel: Antal delmängder av $\{1,2,3\}$ som innehåller talet 1 är 4 eftersom det finns 4 sätt att bilda en sådan delmängd. Vi kan inse det genom att se det hela som en process i 3 steg:

Steg 1. Välj att talet 1 ska vara med. Det kan göras på 1 sätt. Alltså har vi $|A_1| = 1$.
Steg 2. Välj om talet 2 ska vara med eller inte. Det kan göras på två sätt, anting ska 2 vara med eller så ska 2 inte vara med. Alltså har vi $|A_2| = 2$.
Steg 3. Välj om talet 3 ska vara med eller inte. Det kan göras på två sätt, anting ska 3 vara med eller så ska 3 inte vara med. Alltså har vi $|A_3| = 2$.

Enligt multiplikationsprincipen blir nu totala antalet sätt att bilda en mängd med talet 1 lika med $|A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$.

(De fyra delmängderna är förstås $\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}$ och $\{1,2,3\}$).

Övningar

Finan: Example 31.3, Example 31.4.

3. Dirichlets lådprincip

På engelska kallas denna princip *the pigeonhole principle* och den kan övergripande formuleras så här: Låt k vara ett positivt heltal. Om $k+1$ objekt ska läggas in i k lådor måste minst en av lådorna innehålla två objekt.

Ren intuitivt upplever vi detta som självklart och vi ska värdesätta den föståelsen för principen *är* i grund och botten väldigt enkel.

Vi ger dock principen en mer precis matematisk formulering också:

Dirichlets lådprincip: Om A, B är två ändliga mängder med $|A| > |B|$ och $f : A \to B$ är en funktion så kan inte f vara injektiv.

Mängden A spelar här rollen av $k + 1$ (eller fler) objekt och mängden B spelar här rollen av de k lådorna som objekten ska placeras i. Funktionen anger vart varje objekt ska hamna och att det hamnar två objekt i en låda innebär att det finns två olika $x, y \in A$ som har egenskapen att $f(x) = f(y)$ som precis uttrycker att funktionen inte är injektiv.

Exempel: Om vi väljer 11 godtyckliga heltal så måste det finnas två tal bland dessa vars differens är jämnt delbar med 10.

Lösning: Beteckna med A mängden av dessa 11 tal. Om två av talen sammanfaller så är differensen mellan dem 0 som är delbart med 10 så vi studerar det andra fallet då alla talen är skilda åt. Då har mängden A 11 element. Bilda nu funktionen

$$f : A \to \mathbb{Z}_{10}$$

genom att sätta $f(x) =$ den restklass som x tillhör i $\mathbb{Z}_{10}$. Eftersom $\mathbb{Z}_{10}$ innehåller 10 element och A innehåller 11 element så kan funktionen f inte vara injektiv, enligt Dirichlets lådprincip. Det finns alltså skilda $x, y \in A$ som uppfyller $f(x) = f(y)$, det vill säga dessa skilda x och y ligger i samma restklass i $\mathbb{Z}_{10}$. Men det innebär precis att skillnaden mellan dem är jämnt delbar med 10.

Resonemanget kan förstås föras för andra heltal än 11, varje mängd av $k + 1$ heltal måste då innehålla två tal vars skillnad blir jämnt delbar med k.

Exempel: Lådprincipen kan också användas i geometriska resonemang: visa att om 9 punkter placeras i en kub med sidan 2 och ingen punkt placeras på kubens gränsytor så måste två av dessa punkter ligga på kortare avstånd än $\sqrt{3}$.

Lösning: För att se detta så föreställer vi oss att kuben anges av $C = (0, 2) \times (0, 2) \times (0, 2)$ i $\mathbb{R}^3$, alltså kryssprodukten av de tre intervallen $(0, 2), (0, 2)$ och $(0, 2)$. (Här ingår inte 0 och 2 så att vi exkluderar kubens gränsytor.) Den här kuben kan nästan ses som unionen mellan kuberna

$$C_1 = [0,1) \times [0,1) \times [0,1), \quad C_2 = [0,1) \times [0,1) \times [1,2), \quad C_3 = [0,1) \times [1,2) \times [0,1), \quad C_4 = [0,1) \times [1,2] \times [1,2),$$

$$C_5 = [1,2) \times [0,1) \times [0,1), \quad C_6 = [1,2) \times [0,1) \times [1,2), \quad C_7 = [1,2) \times [1,2) \times [0,1), \quad C_8 = [1,2) \times [1,2) \times [1,2).$$

Problemet när vi tar unionen mellan dessa 8 kuber är att vi får med gränsytorna som utgörs av punkter som har någon komponent $= 0$, men det kommer inte att vara ett problem när vi tillämpar lådprincipen.

Tag nu 9 skilda punkter i kuben, beteckna dessa punkter med $p_1, p_2, \ldots, p_9$ och bilda funktionen

$$f : \{p_1, p_2, \ldots, p_9\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

där $f(p_i)$ väljs till det heltal i $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ som anger ordningsnumret på den kub där p_i finns. Enligt lådprincipen kan funktionen inte vara injektiv (eftersom $|\{p_1, p_2, \ldots, p_9\}| = 9 > 8 = |\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}|$) och det finns alltså två punkter $p_i \neq p_j$ med $f(p_i) = f(p_j)$, det vill säga dessa två skilda punkter ligger i samma delkub. Varje delkub har en speciell geometrisk egenskap och det är att största avståndet mellan två punkter i kuben är $\sqrt{3}$ och det avståndet kan bara mätas upp mellan två punkter som ligger på motstående hörn. Men eftersom alla kuber inte innehåller några motstående hörn så måste avståndet mellan två punkter vara strängt mindre än $\sqrt{3}$. De två punkterna a_i, a_j ligger i någon av kuberna och måste därför uppfylla detta det vill säga de måste ha ett avstånd mellan sig som är strängt mindre än $\sqrt{3}$.

Övningar

Det finns övningar på Dirichlets lådprincip bland de gamla tentafrågorna.

4. Permutationer

En *permutation* kan löst sägas vara ett sätt att göra eller arrangera någonting som generellt kan arrangeas eller göras på flera olika sätt. Många problem i kombinatoriken handlar om situationer där vi har ett antal sätt att göra eller arrangera någonting och vi ställer oss då frågan ”på hur många olika sätt kan den här processen utföras”. Ett primärt hjälpmedel för att finna antalet sätt att utföra något eller arrangera något är multiplikationsprincipen och vi ska se på ett antal exempel som får illustrera.

Exempel: Alex uppvaktar Kim och Kim gillar verkligen blommor, särskilt rosor, tulpaner, liljor, lupiner och maskrosor. Kim har också sagt till Alex: ”Tänk vad fantastiskt med människor som kan skapa bra blomsterarrangemang!”. Natten för ett möte med Kim ligger Alex vaken i sin säng och grubblar över blomsterarrangemang ... blomsterarrangemang ... blomsterarrangeman ...

Alex har gått en kurs i linjär algebra och tänker sig först att blommorna ska arrangeras i en rät linje så Alex går till en florist med intentionen att köpa blommor som sedan ska placeras i en rät linje. Floristen har verkligen rosor, tulpaner, liljor, lupiner och maskrosor. Alex har råd att köpa 3 blommor och då uppkommer genast frågan hur många olika blomsterarrangemang kan skapas av 3 blommor som läggs i en rad om dessa blommor är valda frå 5 möjliga? (Alex tänker att det ska vara olika sorter och högst en av varje sort).

Alex känner till multiplikationsprincipen (från en kurs i diskret matematik förstås) och inser att processen att lägga 3 blommor i en rad valda från 5 olika möjliga blommor kan beskrivas som en process i 3 steg:

Steg 1. Välj första blomman. Det kan göras på 5 sätt eftersom alla 5 är tillgängliga eftersom inga tidigare har valts.
Steg 2. Välj den andra blomman. Det kan göras på 4 sätt eftersom vi nu kan välja mellan 4 olika, vi skulle ju inte ha två blommor av samma sort i arrangemanget.
Steg 3. Välj den tredje och sista blomman. Det kan göras på 3 sätt eftersom i de två föregående stegen valdes två olika blommor som inte får förekomma igen, det betyder att det är 3 kvar att välja mellan.

Multiplikationsprincipen ger därför att totala antalet sätt att skapa blomsterarrangmang blir

$$5 \cdot 4 \cdot 3.$$

Om vi använder notationen $n!$ för att beteckna talet $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ så kan vi skriva det här talet så här:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{2!}.$$

Detta tal är 60 så Alex grubblar över dessa 60 olika arrangemang och väljer till slut arrrangemanget

Lupin-Tulpan-Ros

och hoppas att Kim kommer att uppskatta det.

Exempel: Ett par år senare ska Alex och Kim hålla en fin mottagning med många gäster. Kim minns att Alex minsann kan skapa bra arrangemang av saker i rader så Alex får uppdraget att fundera över bordsplaceringen. Alex och Kim har kommit överens om att Alex ska först placera 7 gäster vid bordet och sedan ska Kim placera de återstående 3. Innan Alex väljer en placering av de 7 gästerna funderar Alex på hur många olika sätt placeringen kan göras. Alex inser att antalet sätt att skapa placeringar kan beräknas genom att se skapandet av en viss placering som en process i 7 steg, där steg 1 är att placera första personen, steg 2 är att placera den andra och så vidare. Steg 1 kan utföras på 10 sätt, steg 2 på 9 sätt, steg 3 på 8 sätt, steg 4 på 7 sätt, steg 5 på 6 sätt, steg 6 på 5 sätt och slutligen steg 7 på 4 sätt. Så det totala antalet sätt att skapa placeringar, och därmed det totala antalet placeringar blir

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{10!}{3!} = 604800.$$

I frågeställningar av den här typen återkommer talet $\frac{n!}{(n-k)!}$ där $k \leq n$. Talet uppträder när vi vill välja k olika objekt från en mängd av n olika objekt och placera dem i en viss ordning. I första exemplet valde Alex 3 blommor från en mängd av 5 möjliga, antalet sätt att göra det blev då

$$\frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!}$$

och i det andra exemplet valdes 7 platser ut vid ett bord som hade 10 platser totalt och det aktuella talet då var

$$\frac{10!}{3!} = \frac{10!}{(10-7)!}.$$

Det här talet är mycket viktigt så det har fått en egen beteckning, vi ger den beteckningen i en definition:

Definition: Låt n vara ett positivt heltal och låt $0 \leq k \leq n$. Med beteckningen $P(n,k)$ menas då talet

$$P(n,k) = n \cdot (n-1) \cdots (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Vi introducerar lite mer terminologi här:

Definition: Låt A vara en mängd med n olika element (i första exemplet hade vi 5 olika blommorna och iandra exemplet hade vi de 10 olika platserna vid bordet). En *permutation* av A är då ett arrangemang av alla elementen i A där alla elementen i A placeras i en viss ordning. En *k-permutation* av A är ett arrangemang där k element väljs ut och placeras i en viss ordning (i första exemplet valdes 3 blommor från 5 möjliga och i andra exemplet valdes 7 platser ut från 10 möjliga).

Genom att studera våra exempel ovan så finner vi att följande sats gäller:

Sats: Antalet permutationer av en mängd med n element är $n!$. Antalet k-permutationer av en mängd med n element är $P(n,k)$.

Övningar

Finan: Example 31.5, Example 31.6.

Bogart-Drysdale-Stein: Problem 4 (sidan 7) – här är det viktigt att klargöra vad som menas, troligen menar författarna att dra kort ”med återläggning”, Problem 7 (sidan 7).

5. Kombinationer

Förra avsnittet handlade om problemet att hitta antalet k-permutationer från en given mängd med n element. Det var till exempel 60 3-permutationer (blomsterarrangemang) av en mängd med 5 element (blommorna). Då vi håller på med permutationer är ordningen viktig: två k-permutationer med samma element är olika om de ingående elementen förekommer i olika ordning. Frågan ”Hur många k-permutationer finns det?” är alltså likvärdig med frågan ”Hur många ändliga *följder* med k element kan man bilda då vi väljer element ur en mängd med n möjliga?” Vi ska nu ägna oss åt en besläktad fråga:

”Hur många *mängder* med k element kan man välja ur en mängd med n möjliga?

Vi tar reda på det genom att studera ett exempel.

Exempel: Betrakta en samling av 7 varelser, låt oss säga Axel, Kim, en flicka, en pojke, en hund, en katt och en fisk. (Axel och Kim har ingått ett partnerskap och bildat en familj och fått en dotter och son.) Antag nu också att familjen har vunnit på lotteri och att fyra varelser får åka på en kryssning. Eftersom familjen har 7 varelser så måste familjen också lotta ut resan internt: bara fyra av de sju medlemmarna får resa. På hur många olika sätt kan detta ske, det vill säga: på hur många olika sätt kan 4 individer väljas från en mängd av sju möjliga? Vi kan också formulera det som ”hur många delmängder med fyra element finns då vi väljer element från en mängd med sju?”. Vi vet inte ännu vad detta antal är, men låt oss beteckna det med $\binom{7}{4}$.

Lösning: För att bestämma vad $\binom{7}{4}$ kan vi använva multiplikationsprincipen. Som vi nämnt ovan inför vi alltså talet $\binom{7}{4}$ för antalet delmängder med 4 element valda från en mängd med 7 element. Vi väljer nu ett annat sätt att formera $P(7,4)$, som alltså är lika med antalet *ordnade* följder av 4 element valda ur en mängd av 7. Om vi går tillbaka till exemplet med Axels och Kims familj så är talet $P(7,4)$ antalet postker som kan bildas med 4 av de 7 individerna i familjen. Postkön ”flicka-fisk-katt-hund” skulle då vara en annan postkö än ”fisk-flicka-hund-katt”. Vi ska nu se bildandet av $P(7,4)$, alltså antalet 4-permutationer från en mängd med 7 element som en process i 5 steg:

Steg 1. Välj ut vilka 4 element som ska ingå: detta kan ske på $\binom{7}{4}$ sätt. (I exemplet ovan skulle det kunna vara valet av mängden $\{flicka, fisk, katt, hund\}$ som här *inte* skulle vara ett annat val än mängden $\{fisk, flicka, hund, katt\}$ eftersom mängder inte har någon inbördes ordning mellan sina element.

Steg 2. Välj ut vilket av de 4 valda elementen som ska vara först, det kan ske på 4 sätt.
Steg 3. Välj ut vilket av de 3 återstående elementen som ska komma sen, det kan ske på 3 sätt.
Steg 4. Välj ut vilket av de 2 återstående elementen som ska komma sen, det kan ske på 2 sätt.
Steg 5. Välj ut vilket av det 1 återstående elementet som ska komma sen, det kan ske på 1 sätt. (Ja, det är ju inte mycket till val, det finns ju bara ett kvar att välja på.)

Det vi gjort när vi formerat $P(7,4)$, alltså antalet 4-permutationer ur en mängd med 7 möjliga är alltså att först välja ut de element som ska ingå – detta gjordes i steg 1 – och *sedan* valdes den inbördes ordningen mellan dessa 4 element, den inbördes ordningen valdes i steg 2-5. Sammanfattningsvis finns då alltså

$$\binom{7}{4} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

sätt att bilda antalet 4-permutationer från en mängd med 7 element, vi har alltså fått fram likheten

$$P(7,4) = \binom{7}{4} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \binom{7}{4} \cdot 4!$$

men då kan vi bara dividera båda led med 4! och få

$$\binom{7}{4} = \frac{1}{4!}P(7,4)$$

och vi har lyckats räkna ut $\binom{7}{4}$.

I exemplet är talen 7 och 4 valda så att de ska illustrera en generell sats men det finns förstås ingenting som hindrar oss från att låta talen 7 och 4 ersättas av godtyckliga tal, så generellt har vi följande sats:

Sats: Låt n och k vara givna heltal med $0 \leq k \leq n$. Antalet sätt att välja k element från en mängd med n element är då

$$\binom{n}{k} = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Om vi nu låter k och n vara som i satsen ovan så är som sagt $\binom{n}{k}$ antalet sätt att välja delmängder med k element från en mängd med n element. Till exempel kan vi illustrera $\binom{n}{k}$ som antalet sätt att välja ut k heltal från de första n positiva heltalen

$$\{1, 2, \ldots, n\}.$$

Men om vi räknar antalet sätt att välja ut k heltal från den här mängden så kan vi observera att varje gång vi gör ett val av en mängd med k tal så väljer vi också ut vilka $n-k$ element som *inte* ska vara med. Så fort vi bestämmer oss för en delmängd av $\{1, 2, \ldots, n\}$ så är ju också komplementmängden bestämd. Varje val av k tal från $\{1, 2, \ldots, n\}$ svarar ju då precis mot ett val av de $n-k$ element som *inte* ska vara med. Så antalet sätt att välja k element från n möjliga måste alltså vara lika med antalet sätt att välja ut $n-k$ element från n möjliga. Vi har genom ett kombinatoriskt resonemang kommit fram till formeln

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Vi kan också verifiera formeln algebraiskt:

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{1}{(n-k)!} \cdot \frac{n!}{k!} = \frac{1}{(n-k)!} \cdot \frac{n!}{(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

Vissa författare använder termen *kombination* för delmängd och även termen k-kombination för en delmängd med k element, det är inte så vanligt på svenska och vi kommer inte att använda den termen men termen har ändå givit namn till det här avsnittet av den anledningen. Vi skulle också kunna satt namnet "Antalet Delmängder Av Gn Given Mängd" men det blev lite med ett sådant namn. Ett annat namn skulle kunna vara "binomialkoefficienter" för talet

$$\binom{n}{k}$$

kallas också en *binomialkoefficient* av anledningar som vi kommer att se längre fram. Vi ska nu studera lite mer exempel som involverar binomialkoefficienter, alltså tal av typen $\binom{n}{k}$.

Exempel: Hur många kommittéer bestående av 6 personer kan väljas från en grupp bestående av 20 kvinnor och 10 män om kommittén ska bestå av tre personer av varje kön?

Lösning: Vi ska välja ut 3 kvinnor och 3 män. Vi kan beskriva det som en process i två steg: välj först kvinnorna och därefter männen. Kvinnorna kan väljas på $\binom{20}{3}$ sätt och männen kan väljas på $\binom{10}{3}$ sätt och enligt multiplikationsprincipen blir det totala antalet sätt att välja kommittéer lika med

$$\binom{20}{3} \cdot \binom{10}{3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} \cdot \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 119700.$$

Exempel: En man anmärker att hela gruppen består av 2/3 kvinnor men bara 1/3 män. Han tycker att kommitténs sammansättning bör återspegla dessa proportitioner så han kräver att kommitténs sammansättning ändras till 4 kvinnor och 2 män. Hur många möjliga kommittéer kan nu bildas?

Lösning: Vi behöver bara göra om samma beräkningar med talen 4 och 2 istället för de två 3:orna och vi får nu det nya resultatet

$$\binom{20}{4} \cdot \binom{10}{2} = \frac{20!}{4! \cdot 16!} \cdot \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 218025.$$

Som vi ser är det nästan dubbelt många.

Övningar

Finan: Example 31.7, Example 31.8 (Finan skriver $C(n, k)$ för $\binom{n}{k}$).

Bogart-Drysdale-Stein: Problem 5 (sidan 7) – återigen är det viktigt med precis vad som menas. Troligen menar författarna i det här problemet att korten dras ”utan återläggning”, Problem 6 (sidan 7), Problem 8 (sidan 7), Problem 9 (sidan 7), Problem 10 (sidan 7), Problem 11 (sidan 7), Problem 12 (sidan 7), Problem 13 (sidan 8).

6. Repetitioner

Vi ska nu fortsätta studera urvalsprocesser som involverar val i flera steg. Vi kommer kunna använda dessa sätt att beskriva urvalsprocesser för att göra sannolikhetsberäkningar och det kommer i sin tur att hjälpa oss att förstå strukturen på mängder bättre. Multiplikationsprincipen kommer att vara en grund för dessa vidare utvecklingar av teorin. Vi studerar detta genom att ge exempel som vi generaliserar till satser. Vi ska börja med att ge alternativa tolkningar av både $P(n, k)$ och $\binom{n}{k}$.

Talet $P(n, k)$ kan beskrivas som antalet sätt att lägga k *olika* objekt i n lådor med högst ett element i varje låda: alltså de k lådor som ska ha ett objekt i sig väljs ut och eftersom objekten är olika blir ordningen på lådorna relevant. Observera att i det här synsättet är elementen som väljs ut själva *lådorna*. Och talet $P(n, k)$ var då givet av formeln

$$P(n, k) = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

En alternativ tolkning av den här situationen är om vi har en så kallad urna med n olikfärgade kulor i och tar upp k kulor i en bestämd ordning. Antalet olika sätt att ta upp dessa k kulor, i olika ordningar, blir också just talet $P(n, k)$. När vi talar om urnmodeller brukar vi också ange om vi ska lägga tillbaka kulor eller inte och då vi tar upp kulor ur urnan och räknar antalet ordningsföljder så läggs inga kulor tillbaka i urnan, vi säger då att urvalsprocessen är *utan återläggning*. I urnmodellen väljs alltså kulor ut, i lådmodellen ovan valdes lådor ut.

Vi återvänder till att lägga objekt i lådor och studerar variationen som uppkommer om alla objekt är exakt lika. Antalet möjligheter att lägga k precis likadana objekt i n lådor med högst ett objekt i varje låda blir då $\binom{n}{k}$ som kan uppfattas som det tal som räknar antalet delmängder med k element valda från n möjliga, det som vi väljer ut i lådmodellen är alltså de k lådor som ska ha ett objekt i sig.

Motsvarande urnmodell kan beskrivas genom att vi studerar hur många sätt det finns att utan återläggning ta upp k kulor från en urna som innehåller n olika kulor där alla kulor är olika och där ordningen inte är viktig. Det blir helt enkelt $\binom{n}{k}$ som då räknar antalet delmängder med k element när dessa väljs från en mängd med n element.

Vi återvänder nu till modellen där vi lägger objekt i lådor och studerar situationen där vi kan lägga *flera* objekt i varje låda. Det uppstår en *repetition* i och med att vi kan välja samma låda flera gånger, därav titeln på det här avsnittet. Vi tar ett exempel.

Exempel: På hur många sätt kan vi lägga tre kulor, en blå, en röd och en gul i fyra olika lådor om vi få lägga hur många kulor vi vill i varje låda?

Lösning: Alla tre kulor kan läggas hur som helst, ingen låda blir någonsin full (enligt problemets förutsättningar) så det finns 4 sätt att placera den gula, den röda och den blå så enligt multiplikationsregeln blir totala antalet sätt att lägga alla kulor

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64 \text{ sätt.}$$

Motsvarande urnmodell som illustrerar samma princip som ovanstående exempel kan formuleras så här: betrakta en urna innehållandes fyra kulor av olika färg: en blå, en gul, en röd och en grön. Om tar upp en kula tre gånger från denna urna och lägger tillbaka kulan mellan varje gång (detta kallas att vi tar "*med* återläggning"), på hur många olika sätt kan detta ske? Svaret blir som läsaren troligen inser återigen 4^3.

Vi återvänder nu till situationen där vi vill lägga kulor i lådor. I det ovanstående har vi utrett situationen då vi lägger olikfärgade kulor i olika lådor. Vi vill nu lista ut på hur många olika sätt man kan lågga samma typ av objekt som kan representeras av *likafärgade* kulor. Vi studerar detta genom att ge ett exempel som delvis anknyter till elektroteknik.

Exempel: Nicola Tesla var en berömd uppfinnare som gav oss trefassystemet för distribution av elkraft. Herr Tesla tyckte mycket om duvor och beställde speciella fröer för att mata duvor i parken. Vi tänker oss då situationen att Tesla kastar ut 5 frön och tre duvor kommer och tar dessa frön. Hur många olika sätt kan dessa frön fördelas bland duvorna?

Solution: Vi lšer det här problemet genom att representera fröna med nollor, fem frörn representeras alltså av symbolerna

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.$$

Till dessa symboler ska vi lägga symbolerna 1 och 1 och vi ska representera ett utfall av en matning genom att bilda strängar av symbolerna 0 och 1 på följande sätt:

(1) Först anges antalet frörn som duva 1 äter genom att att ett antal nollor skrivs.
(2) Sedan anges en etta för att symbolisera gränsen mellan det som den första och den andra duvan äter.
(3) Sedan anges ett antal nollor som symboliserar det som den andra duvan äter.
(4) Efter det anges en etta som symboliserar gränsen mellan det den andra och den tredje duvan äter.
(5) Till sist anges de nollor som symboliserar de frön som den sista duvan äter.

Dessa strängarna kommer alltså att vara 0000011, som symboliserar att den första duvan fick alla frön, 0000101 som symboliserar att den första duvan fick 4 frörn, den andra duvan fick ett frö och den sista duvan inget och så vidare till 1100000 som symboliserar att den sista duvan fick alla frön.

Eftersom varje sträng respresenterar precis en distribution av frön mellan duvorna så svarar varje strïg mot precis ett utfall av urvalsprocessen så genom att räkna antalet strängar med 7 symboler bestående av fem nollor och två ettor kan vi alltså räkna antalet sätt att bland tre duvor fördela fem frön. Så vå fråga kan alltså formuleras om till på hur många olika sätt kan strängar av detta slag skapas? Svaret är enkelt, vi kan se det som ett urvalsproblem där vi har sju symboler som alla antingen ska vara 1 eller 0 och det ska vara två ettor. Antalet sådana strängar svarar då mot att vi räknar på hur mänga olika sätt vi kan välja de 2 positioner som ska vara ettor: och det blir

$$\binom{7}{2} = 21 = \binom{3+5-1}{3-1} = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k} \text{ (eftersom } \tbinom{p+q}{p} = \tbinom{p+q}{q} \text{ för alla } p, q).$$

där $n = 3$ och $k = 5$. Nu har vi infört symbolerna n, k eftersom det inte finns nägonting i detta exempel som är specifikt för 3 eller 5, det fungerar utmärkt generella och därför har vi en formel som fungerar för alla n, k. Vi ger en lista på alla dessa strängar som fungerar som representationer av fördelningar av frön bland duvor:

$$0000011, 0000101, 0001001, 0010001, 0100001, 1000001, 0000110, 0001010, 0010010, 0100010, 1000010,$$

$$0001100, 0010100, 0100100, 1000100, 0011000, 0101000, 1001000, 0110000, 1010000, 1100000.$$

Och som vi ser är det precis 21 sådana strängar. Denna procedure är förstås användbar för att beräkna antal sätt att fördela identiska kulor i olika lådor med möjlighet att lägga flera kulor i varje låda. Vi ger nu också en överblick av fyra olika formler som vi härlett för olika fördelningssituationer. Denna ges i tabell (1).

Vi ska avsluta det här avsnittet genom att studera en speciell applikation av multiplikationsprincipen: omordning av objekt som omväxlande är lika och olika. Vi tar ett exempel direkt:

Table 1. Antal sätt att lägga k kulor i n numrerade lådor är

	Identiska kulor	Olika kulor
Högst en kula per låda	$\binom{n}{k}$	$P(n,k)$
Hur många kulor som helst i varje låda	$\binom{n+k-1}{k}$	n^k

Exempel: Ett anagram av ett ord är en följd av bokstäver som innehåller bokstäverna i detta ord. Till exempel är ”ASPRI” ett anagram av ”PARIS”. Det engelska ordet ”THINK” har ett anagram som ser ut så här: ”KHNIT”. Frågan är nu hur många anagram ordet

ANNAGRAM

har. (Detta är en felstavning av ordet anagram.)

Lösning: Vi ska bilda ett anagram av bokstäverna A, N, N, A, G, R, A, M. Vi kan lösa det här problemet genom att se formerandet av ett anagram som en process i 3 steg:

1. Välj på vilka positioner A'na ska stå: vi har 8 möjliga positioner och 3 A'n så detta kan göras på $\binom{8}{3}$ sätt.
2. Välj var N'n ska stå: vi har 5 positioner kvar och 2 N så detta kn göras på $\binom{5}{2}$ sätt.
3. Välj till sist konstellationen av G, R, och M: vi har 3 positioner kvar och bokstäverna G,R,M kan placeras på dessa positioner på 3! sätt.

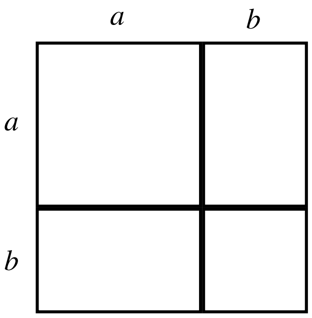
Totalt sett blir det alltså $\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot 3! = \frac{8!}{5!3!}\frac{5!}{3!2!}3! = \frac{8!}{3!2!} = 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 3360$ anagram av ordet ANNAGRAM.

Övningar

Övningar till detta avsnitt kommer efter följande avsnitt.

7. Binomialsatsen

Betrakta multiplikationen som ingår i uttrycket $(a+b) \cdot (a+b)$. Från tidigare matematikstudier kommer vi i håg att det här uttrycket är lika med $a^2 + 2ab + b^2$ och vi ska nu studera i detalj hur det uppkommer. Vi ser på en figur:



Att beräkna uttrycket $(a+b) \cdot (a+b)$ kan liknas vid att beräkna arean av den kvadrat som illustreras i figuren. Den har sidan $a+b$ och när vi multiplicerar $a+b$ med sig själv (som mvi gör när vi beräknar arean av en kvadrat) så behöver varje term i $a+b$, det vill säga a:et och b:et var för sig, multipliceras med varje term i $a+b$ det vill säga a:et och b:et. Varje term i första parentesen ska alltså multipliceras med varje term ur den andra parentesen. Det ger upphov till produkterna $a \cdot a = a^2$, $a \cdot b = ab$, $b \cdot a = ba$, and $b \cdot b = b^2$ som alla kan tolkas som areor i figuren. Sedan ska dessa resulterande produkter adderas för att beräkna den totala arean och det ger upphov till summan

$$a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

som är det välkända uttrycket för $(a+b)^2$. (Det här brukar även kallas *första kvadreringsregeln.*) Det är nu värt att observera att beskrivningen ovan med att ”alla termer ur alla parenteser ska multipliceras med alla termer i alla andra parenteser” är en *kombinatorisk* beskrivning av hur vi når ett algebraiskt uttryck: de fyra termerna i $a^2 + ab + ba + b^2$ uppnås genom att vi väljer alla möjliga kombinationer att multiplicera de två termerna (a och b) ur den första parentesen med de två termerna ur den andra parentesen (också a och b). Enligt multiplikationspricnipen får vi då $2 \cdot 2 = 4$ möjligheter och drför de 4 termerna

$$a^2, \quad ab, \quad ba, \quad \text{och} \quad b^2$$

vars summa är det välkända uttrycket i första kvadreringsregeln.

Vi ska göra detta kombinatoriska uttalande igen i det generella fallet, alltså för en allmän potens, men först ska vi betrakta potensen 3 för att lättare kunna göra generaliseringen till en allmän potens.

Vi betraktar alltså $(a+b)^3$ och skriver det som

$$(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$

och om vi skriver upp alla produkter som resulterar ifrån processen att multiplicera varje term ur varje parentes med varje annan term ur alla andra parenteser så får vi en lista på dessa termer med följande utseende:

$$aaa, aab, aba, baa, abb, bab, bba, bbb.$$

och när vi summerar dessa termer får vi

now when multiplying the sides with each other (as one does when calculating the area of a square) we need to multiply each term in $(a+b)$ (the first side) with each term in $(a+b)$ (the other side), this means forming the expressions $a\cdot a = a^2$, $a\cdot b = ab$, $b\cdot a = ab$, and $b\cdot b = b^2$. This can be thought of, combinatorially, to choose every term in $(a+b)$ (there is only 2 of them) and multiplying them with every term in $(a+b)$ (only 2 here also), combinatorially this makes $2\cdot 2 = 4$ terms whose expressions we have listed. Summing upp all these terms we get $a^2+ab+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2$, the well-known expansion of $(a+b)^2$.

$$(a+b)(a+b)(a+b) = aaa + aab + aba + baa + abb + bab + bba + bbb = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Vi ska nu generalisera det här till en allmän potens n och vi vill alltså beräkna

$$(a+b)^n$$

där n är ett positivt heltal och a och b är vilka tal som helst. Då vi multiplicerar ihop alla n parenteser på samma sätt som för $n=2$ och $n=3$ så kommer vi få en rad uttryck som ska summeras. Dessa uttryck kommer att vara på formen $a^j\cdot b^k$ där $j+k=n$. Till exempel så vi att uttrycket för $(a+b)^3$ bestod bland annat av termerna $a^3 = a^3b^0$ $(3+0=3)$, a^2b^1 $(2+1=3)$ och så vidare. Uttrycket för $(a+b)^n$ när vi multiplicerat ihop alla termern i alla parenteser med varandra kommer alltså att se ut så här:

(1) $$(a+b)^n = (\text{koeff})\cdot a^nb^0 + (\text{koeff})\cdot a^{n-1}b^1 + \ldots + (\text{koeff})a^1b^{n-1} + (\text{koeff})\cdot a^0b^n$$

där uttrycket "koeff" står för en koefficienter som vi inte ännu vet vilka de är.

Så frågan är vilka är dessa koefficienter? Vi studerar varje term för sig och vi ska föra ett kombinatoriskt resonemang för att lista ut vad de är. Så vi börjar med den första termen: $(\text{koeff})\cdot a^nb^0$. Hur uppkommer denna term? Jo, det är då vi vid ihopmultiplikationen väljer a från samtliga parenteser av formen $(a+b)$. Det finns endast ett sätt att göra det och det är att välja a från samtliga parenteser så den koefficienten måste vara 1. Alltså har vi (1) givet av

(2) $$(a+b)^n = 1\cdot a^nb^0 + (\text{koeff})\cdot a^{n-1}b^1 + \ldots + (\text{koeff})a^1b^{n-1} + (\text{koeff})\cdot a^0b^n.$$

Vi går vidare till andra termen: $(\text{koeff})\cdot a^{n-1}b^1$ – hur uppstår den? Jo, genom att vi väljer a från $n-1$ parenteser på formen $(a+b)$ och b från 1 av parenteserna. Koefficienten räknar då antalet sätt som det är möjligt att göra detta val och koefficienten kommer alltså att bli lika med antalet sätt att välja ut 1 parentes som vi tar b ifrån, från n möjliga parentser, det är alltså

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\cdot(n-1)!} = n$$

och på liknande sätt kan vi inse att den första koefficienten (som var 1) svarar mot ett val av 0 parenteser av n möjliga som vi tar b ifrån, det vill säga vi tar a ifrån alla parenteser, och koefficienten räknar antal möjligheter att göra detta som blir

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\cdot(n-0)!} = 1.$$

Och självklart upträder ett mönster här så att (1) i själva verket ges av

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n$$

och detta är uttrycket i binomialsatsen och det förklarar också namnet "binomialkoefficient" på uttrycken av typen $\binom{n}{k}$. Vi har alltså:

Sats: *Binomialsatsen* För varje positivt heltal och varje par av reella tal a, b har vi

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

Uttrycket $a+b$ har två termer och därför kallas det ett *binom*. Ordet *bi* betyder ju två och här har vi också förklaringen till ”bi” i ordet ”binomialkoefficient”.

Vi ska nu studera egenskaper hos binomialkoefficienterna baserat på mer kombinatoriska resonemang.

Exempel: Betrakta $\binom{7}{4}$. Den betecknar alltså antalet sätt att välja ut 4 objekt från en mängd bestående av 7 element. Beteckna ett tag dessa sju element med

$$o_1, \quad o_2, \quad o_3, \quad o_4, \quad o_5, \quad o_6, \quad \text{och} \quad o_7.$$

Genom att fästa uppmärksamheten på ett visst element, säg o_1, så kan vi beräkna $\binom{7}{4}$ som en summa av två tal, A och B där

(1) $A =$ antalet sätt att välja ut 4 element från de 7 givna, givet att o_1 är med.
(2) $B =$ antalet sätt att välja ut 4 element från de 7 givna, givet att o_1 *inte*är med.

Det här är en enkel tillämpning av additionsprincipen för antingen är o_1 med i valet av dlemängd av $\{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6, o$ eller så är o_1 inte med. Men både talet A och B är enklare att räkna ut än $\binom{7}{4}$, talet A blir ju bara $\binom{6}{3}$ eftersom det är givet att o_1 ska vara med och då måste de övriga 3 elementen väljas från $\{o_2, o_3, o_4, o_5, o_6, o_7\}$ som är 6 till antalet. På samma sätt blir $B = \binom{6}{4}$ eftersom alla 4 element som ska vara med nu ska väljas från $\{o_2, o_3, o_4, o_5, o_6, o_7\}$. Sammantaget har vi

$$\binom{7}{4} = \binom{6}{3} + \binom{6}{4}$$

och det är förstås ingenting som är speciellt med 7 och 4, så fort vi har heltal n, k med $k < n$ så kan vi resonera på samma sätt och få

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Den här identiteten kallas *Pascals Formel* och den ger upphov till en struktur på mängden av alla binomialkoefficienter. Den strukturen kallas *Pascals Triangel* och den är en karta över alla binomialkoefficienter. Då vi ritar Pascals triangel utgår vi från att $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ för alla naturliga tal n. Då kan vi sätta alla binomialkoefficienter av detta slag längd med kanten av en triangel som får följande utseende:

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=0: & & & & & 1 & & & & \\
n=1: & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2: & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

De övre kanterna är som sagt alla binomialkoefficienterna på formen $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, alla dem ä lika med 1. Det inre av triangeln är då binomialkoefficienter som kan beräknas med hjälp av Pascals formel. Till exempel är

$$\binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{0}{0} = 1 + 1 = 2$$

och det är 2:an i det inre i mitten och vi få den genom att summera de två binomialkoefficienterna som ligger diagonalt över, alltså $\binom{1}{0} = 1$ och $\binom{1}{1} = 1$. På samma sätt har vi

$$\binom{3}{1} = \binom{3}{0} + \binom{2}{1} = 1 + 2 = 3$$

och så vidare. Om vi tittar noga så ser vi också att binomalkoefficienterna för varje utveckling av $(a+b)^n$ ligger inbäddade på varje rad. På rad 0 har vi bara en 1:a och $(a+b)^0$ är ju lika med 1. På rad 1 har vi 1 och 1 och $(a+b)^1$ är ju bara $1 \cdot a + 1 \cdot b$. Vidare, på rad 2 har vi koefficienterna 1 2 1 och enligt 1:a kvadreringsregeln gäller ju som bekant $(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2$ och mönstret fortsätter förstå vidare för högre potenser.

Exempel: Har utvecklingen av $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{10}$ någon konstant term? Någon x-term? Någon x^2-term?

Lösning: En direkt tillämpning av binomialsatsen ger:

$$\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (2x^2)^{10-k} \cdot (-\frac{1}{x})^k = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 2^{10-k} x^{20-2k} (-1)^k x^{-k} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 2^{10-k} (-1)^k x^{20-3k}.$$

Och vi ställer oss alltså frågan om detta uttryck har någon konstant term. Det skulle i så fall krävas att exponenten för x är 0. Kan exponenten för x vara 0? Nej, för exponenten för x är $20 - 3k$ och om det är 0 så skulle $20 = 3k$ och 20 är inte delbart med 3. Så det finns inga konstanta termen i uttrycket ifråga. På ett liknande sätt kan läsaren övertyga sig om att det inte heller kan finnas någon x-term. Däremot finns faktiskt en x^2-term och vi kan få fram den genom att först söka det k för vilket $20 - 3k = 2$. Detta är en ekvation i k som har lösningen $k = 6$ och om vi sätter $k = 6$ i

$$\binom{10}{k} 2^{10-k} (-1)^k x^{20-3k}$$

så uppstår x^2-termen och koeffficienten framför x^2 blir då

$$\binom{10}{6} 2^{10-6} (-1)^6$$

så hela x^2-termen ges av

$$\binom{10}{6} 2^{10-6} (-1)^6 \cdot x^2 = 2^4 \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot x^2 = 2^4 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 7 \cdot x^2 = 210 \cdot 16 \cdot x^2 = 3360 \cdot x^2.$$

Övningar

Finan: Example 31.9, Example 31.10.

Bogart-Drysdale-Stein: Exercise 1.3-1, Exercise 1.3-2, Exercise 1.3-3, Exercise 1.3-4, Problem 1 (sidan 25), Problem 2 (sidan 25), Problem 3 (sidan 25), Problem 4 (sidan 25), Problem 7 (sidan 25).

Blandade övningar

Finan: Problem 31.1, Problem 31.2, Problem 31.3, Problem 31.4, Problem 31.5, Problem 31.6, Problem 31.7.

Bogart-Drysdale-Stein: Exercise 1.2-2, Exercise 1.2-3, Exercise 1.2-4, Exercise 1.2-5, Exercise 1.2-6, Exercise 1.2-8 (dessa övningar är inte av tentamenskaraktär. Bogart-Drysdale-Stein skriver också $n^{\underline{k}}$ istället för $P(n, k)$), Problem 2 (sidan 16), Problem 3 (sidan 16), Problem 4 (sidan 16), Problem 5 (sidan 16), Problem 6 (sidan 16), Problem 7 (sidan 16), Problem 8 (sidan 16), Problem 11 (sidan 25), Problem 12 (sidan 25), och Problem 13-19 (sidan 26).