KAPITEL 5 - RELATIONER

I detta kapitel ska vi behandla *relationer* och det kommer att vara ett sätt att skapa mera fasta grunder för bland annat funktioner. Vårt studium av funktioner involverade en alternativ notation med par som föregrep framställningen av relationer så vi har egentligen redan börjat med relationer lite grann.

Men relationer har fler användningsområden i matematiken, bland annat kan de användas för skapa strukturer som kan användas för att dra slutsatser. Kongruenser som vi studerat tidigare kommer vi se kan till stor del ses i ljuset av teorin kring relationer. Och självklart finns oerhört viktiga tillämpningar av relationer i databasatekniken.

1. Binära relationer

Det matematiska relationsbegreppet används för att modellera *samband*, vi kan alltså beskriva vad det betyder att ”koppla ihop” flera saker med varandra. Vi ska i ett inledande skede inrikta oss på relationer som kopplar ihop saker i par – de kallas *binära* relationer och vi ger en definition.

Definition: Låt A och B vara vara mängder. En *binär relation* från A till B är då en delmängd R av $A \times B$. Om två element, $x \in A$ och $y \in B$ har egenskapen att $(x, y) \in R$ så säger vi att x är *relaterat* till y och detta skrivs xRy.

Med denna definition blir en *funktion* en speciell typ av relation som alltså har de kraven att alla $x \in A$ ska finnas med och för varje x finns exakt ett y så att $(x, y) \in R$ som då kallas *bilden* av x (alltså $f(x)$). Men nu släpper vi alltså kraven på att vi ska kunna kunna skriva $y = f(x)$ och en relation R (från A till B) blir alltså *bara* en delmängd av $A \times B$. Det här blir alltså *mycket* mer allmängiltigt.

Ett exempel på en relation från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ skulle då kunna vara mängden av alla punkterna (x, y) som uppfyller $x^2 + y^2 = 1$. Vi illustrerar den mängden i figur 1. Låt oss kalla den här mängden för C. Enligt definitionen av en relation är x relaterad till y om och endast om xCy vilket är samma sak som att punkten (x, y) i planet ligger på enhetscirkeln C (som vi också kan skriva $(x, y) \in C$).

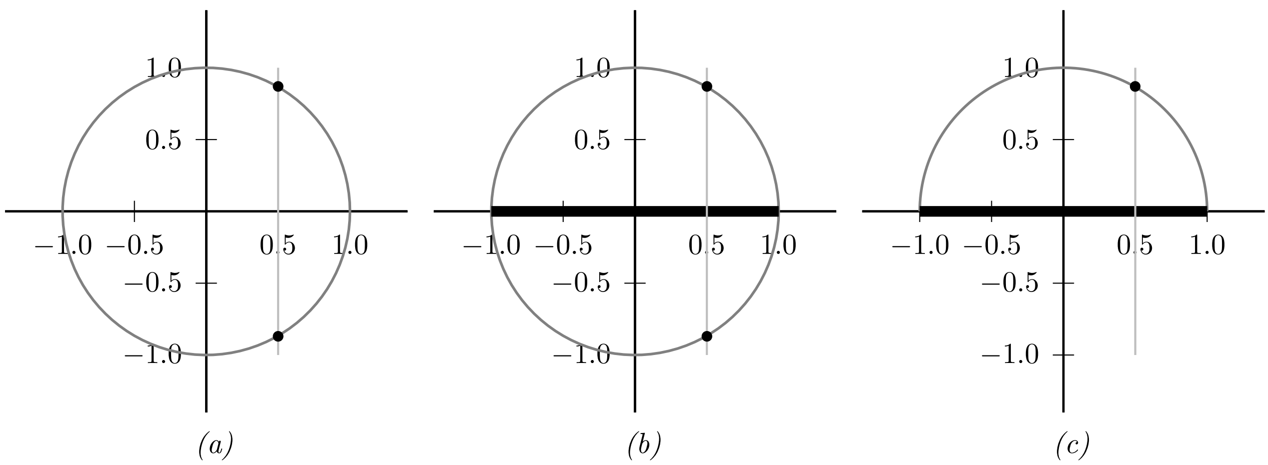


Figure 1. *Tre diagram i xy-planet hörande till* $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$.

Figur 1 har *tre* diagram i sig markerade med *(a)*, *(b)* och *(c)*. Diagrammet i *(a)* symboliserar den allmänna mängden som är enhetscirkeln C, detta är en delmängd av talplanet $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ och definerar alltså en relation från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Men den definierar *inte en funktion.* Vi ser det av två anledningar i *(a).* Dels förekommer inte alla tal $x \in \mathbb{R}$ som x-koordinater på punkter som ligger i mängden. Alla punkter med x-koordinater utanför intervallet $[-1, 1]$ saknas. Till exempel finns inte någon punkt (x, y) i mängden med $x = 1.2$. Den andra anledningen till att den här mängden (enhetscirkeln) inte definierar en funktion är att vi kan hitta två skilda punkter $(x, y_1), (x, y_2) \in C$ med $y_1 \neq y_2$. Ett sådant par av punkter är illustrerade i *(a)* och *(b).* Om vi hade haft grafen till en funktion här så hade inte den lodräta linjen genom punkten $x = 0.5$ skurit grafen i två *olika* punkter. Vi har alltså $x = 0.5$ som är relaterat till två olika y-värden, till $y_1 = \sqrt{3}/2 \approx 0.87$ respektive till

$y_2 = -\sqrt{3}/2 \approx -0.87$. Dessa punkter är markerade i figuren och det är viktigt att se den principiella skillnaden mellan fallen som illustreras av *(a)* och *(b)* – där vi alltså *inte* får en funktion, jämfört med det som illustreras i *(c)* – där vi alltså *får* en funktion.

För att relationen C verkligen ska definiera en funktion måste vi göra två inskränkningar (som svarar precis mot de två krav som vi måste ställa på en relation för att det också ska vara en funktion). Den första inskränkningen är att vi begränsar oss till att x bara får anta värden i intervallet $[-1, 1]$. Det illustreras i *(b)* genom att vi fetmarkerat den del av x-axeln som nu gäller. Men det är inte nog, som vi fortfarande ser i *(b)* kvarstår problemet med tvetydigheten. För att komma tillrätta med det bestämmer vi oss för ett y-värde för varje punkt, vi kan ta vilket som helst på cirkeln men här bestämmer vi oss för att välja den punkt som har en y-koordinat med ett ickenegativt värde. Vi ser detta i *(c)* där vi alltså tagit bort den undre halvan av enhetscirkeln för att kunna skapa en mängd som också är en funktion. Observera att vi då inte längre har samma relation som vi betecknat C ovan (enhetscirkeln), det här är något annat och vi kan teckna en definition av den mängden istället:

$$D = \{(x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1 \wedge y \geq 0\}.$$

De extra kraven $-1 \leq x \leq 1$ och $0 \leq y$ definierar alltså en funktion och vi kan räkna ut ett matematiskt uttryck för den, det blir $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ och vi har alltså domänen (eller definitionsmängden) $x \in [-1, 1]$.

Det är nu förhoppningsvis klart och tydligt vad som är en funktion och vad som är en relation men för att illustrera skillnaden mer tar vi nu ett mer ickenumeriskt exempel på hur en relation kan se ut.

Exempel: Låt A vara mängden av 4 människor, säg

$$A = \{Sahar, Linda, Premasiri, Johnny\}$$

och låt B vara mängden av 4 yrken, säg

$$B = \{Snickare, Läkare, Ingenjör, Lärare, Andningsterapeut\}.$$

Vi kan nu definiera en relation R från A till B som uttrycker att ett element i A (alltså en människa) har ett visst yrke i mängden B. Vi skulle då kunna skriva det vanliga uttalandet "Sahar är snickare" som $(Sahar, Snickare) \in R$. Mängdteoretiskt betyder det alltså att paret $(Sahar, Snickare)$ ligger i delmängden R av $A \times B$. Det finns inga hinder för Sahar att inneha flera yrken och vi kan uttrycka detta genom att också säga att $(Sahar, Snickare) \in R \wedge (Sahar, Läkare) \in R$ om vi vill uttrycka att Sahar har både yrkena Snickare och Läkare. Och vilka kombinationer som helst är tillåtna, till exempel gäller att jag är lärare och andningsterapeut och detta modelleras med att vi säger att $(Johnny, Lärare) \in R \wedge (Johnny, Andningsterapeut) \in R$.

Det här exemplet utgör en illustration av hur relationsdatabaser fungerar. Ett så kallat *relational database management system (RDBMS)* består av möjligheter att lagra par på detta sätt men i databastekniken går vi förstås ännu längre och använder relationer av högre ordning och sparar kanske tripplar eller fyrtipplar av datamedlemmar. Vi kommer dock bara att studera *binära* relationer i den här framställningen.

Vi tar ett mer matematiskt-numeriskt exempel.

Exempel: Vi går tillbaka till exemplet med enhetscirkeln $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$. Här definierades som sagt en relation från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Vi tar nu ett antal mycket konkreta exempel. Punkterna $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ och $(0, -1)$ ligger alla i C alltså gäller $0C1$, $1C0$, $0C-1$ och $-1C0$. Dock eftersom ingen av punkterna $(1, 1)$ eller $(-1, -1)$ ligger i C så har vi *inte* $1C1$ eller $-1C-1$.

Binära relationer har vissa egenskaper som gör att de beter sig på speciella sätt. Detta är speciellt uttalat då relationerna går från en mängd tillbaka till samma mängd. Alltså att $A = B$ i definitionen av en relation. I detta fall säger vi att en relation R är definierad *på* en mängd A och vi har då alltså att $R \subset A \times A$. Vi hade *inte* den situationen i de exemplet ovan med människor och deras yrken. Men vi preciserar vad det här betyder i en definition och inför samtidigt egenskaperna som vi vill studera:

Definition: Låt R vara en relation definerad på mängden A (dvs låt $R \subset A \times A$). Då kallas relationen R

(a) *reflexiv* $\Leftrightarrow \forall x \in A : xRx$, det betyder att varje element i A är relaterat till sig självt.
(b) *symmetrisk* $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : xRy \leftrightarrow yRx$, det betyder att vi alltid har xRy och yRx samtidigt, vi kan aldrig ha xRy om vi inte också har yRx.
(c) *antisymmmetrisk* $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : xRy \wedge yRx \rightarrow x = y$. Vi kommer se på vad detta betyder i exempel snart.

(d) *transitiv* $\Leftrightarrow \forall x, y, x \in A : xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$, detta betyder att om x är relaterad till y och y i sin tur är relatera till z, så blir x också relaterad till z. (Relationen ”transcenderar” y.)

Vi ska nu studera exempel på alla dessa egenskaper.

Exempel: Vi betraktar återigen relationen C ovan, alltså enhetscirkeln, är definerad *på* mängden $\mathbb{R}$ och undersöker vilka egenskaper den har.

* Relationen C är *inte* reflexiv. Kravet på att en relation ska vara reflexiv är ju att alla element i A (alltså här $\mathbb{R}$) ska vara relaterade till sig själva och även om vi kan hitta element $(x, y) \in C$ som har $x = y$ (det är fallet för $(x, y) = (\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$) så gäller till exempel inte $1C1$ eller $-1C-1$ som vi konstaterade ovan. Kravet på reflexivitet är alltså *inte* uppfyllt. Man kan rent grafiskt tolka kravet på reflexivitet att den räta linjen $y = x$ ska vara inkluderad i relationen, men det är den alltså inte här. De enda punkterna från linjen $y = x$ som är med är $(x, y) = (\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$.

* Relationen C *är* symmetrisk. Vi kan övertyga oss genom det genom att observera att

$$(x, y) \in C \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 + x^2 = 1 \Leftrightarrow (y, x) \in C.$$

  Alltså är ekvivalensen $xCy \Leftrightarrow yCx$ och det är symmetri. Den grafiska tolkningen här är att bilden av relationen är symmetrisk i den räta linjen $y = x$ och enhetscirkeln har ju denna egenskap.

* Relationen C är *inte* anti-symmetrisk. Vi kan ju hitta x och y med xCy och yCx utan att $x = y$, till exempel gäller detta för $x = 1$ och $y = 0$. Kravet på antisymmetri är alltså inte uppfyllt.

* Relationen C är *inte* transitiv, betrakta till exempel $x = 1$, $y = 0$ och $z = -1$. Då har vi både xCy och yCz men trots detta har vi inte xCz. Kravet på transitivitet är alltså inte uppfyllt.

I exemplet ovan skulle vi undersöka om relationen C hade fyra egenskaper. Dessa egenskaper (*reflexivitet* etc.) var formulerade med hjälp av allmänna påståenden formulerade som kvantifierade predikat, alltså ”för alla element ska något gälla”. För att fullborda en sådan utredning har vi två alternativ, antingen visa att relationen har den aktuella egenskapen och då måste argumentet vara generellt och utsträckas över alla element i den aktuella mängden. Det var det som skedde när vi visade symmetri, vi presenterade ett argument som höll för alla möjliga val av element. Det andra alternativet är om vi vill visa att någon egenskap *inte* är uppfylld. Eftersom egenskaperna är formulerade som krav på att något ska gälla ”för alla” så räckte det med att hitta *enskilda* motexempel. Det hade förstås räckt med att hitta ett enda motexempel, vi hittade motexempel som visade att relationen inte var reflexiv, symmetrisk eller transitiv.

Vi ska nu studera två av den här framställningens allra viktigaste exempel. Vi har förberett studiet av dessa exempel genom att studera delbarhet tidigare.

Exempel: Låt relationen R på heltalen $\mathbb{Z}$ vara given av

$$xRy \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 7k.$$

Vi har tidigare sett relationer av den här typen, vi har ju att $x - y = 7k \Leftrightarrow 7|x - y$ det vill säga den här relationen kan skrivas $xRy \Leftrightarrow x \equiv y \pmod 7$. Två heltal x, y är alltså relaterade till varandra enligt R om och endast om de är kongruenta modulo 7. Därför kallas den här relationen också *kongruensrelationen.* Vi ska nu se vilka egenskaper den har.

(1) Reflexivitet? Gäller det att xRx för alla heltal $x \in \mathbb{Z}$? Frågan är alltså om vi kan hitta ett heltal $k \in \mathbb{Z}$ sådant att

$$x - x = 7 \cdot k.$$

Ja det är klart att vi kan eftersom $x - x = 0$. Då fungerar $k = 0$ så kravet på reflexivitet är alltså uppfyllt. Kongruensrelationen är alltså *reflexiv.*

(2) Symmetri? Om vi kan visa att $xRx \Leftrightarrow yRx$ så är saken klar. Vi studerar xRy:

$$xRy \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 7k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y - x = 7 \cdot (-k).$$

Här har vi använt egenskapen att $x - y = (-1) \cdot (y - x)$ för att se att $y - x$ uppenbarligen också blir en multipel av 7 om och endast om $x - y$ är en multipel av 7. Det vill säga vi har $xRy \Leftrightarrow yRx$ vilket visar att symmetrikravet är uppfyllt. Kongruensrelationen är alltså *symmetrisk*.

(3) Antisymmetri? Kan vi visa $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$? Efter lite experimenterande kommer vi fram atill att vi *inte* kan visa detta för det gäller inte. Vi kan till exempel välja $x = 7$ och $y = 0$. Då gäller $xRy \wedge yRx$ men trots det $x \neq y$. Så detta motexempel visar att kongruensrelationen *inte* är antisymmetrisk.

(4) Slutligen studerar vi transitivitet. För visa transitivitet ska vi visa att $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$. För att visa denna implikation gör vi alltså antagandet $xRy \wedge yRz$. Då finns heltak k_1 och k_2 sådana att $x - y = 7 \cdot k_1$ och $y - z = 7 \cdot k_2$. Och då kan vi skriva

$$x - z = x - y + y - z = 7k_1 + 7k_2 = 7 \cdot (k_1 + k_2)$$

men detta innebär precis att $x - z = 7k$ för ett heltal $k = k_1 + k_2$ och eftersom detta betyder precis att xRz så har vi visat den implikation vi skulle visa så kongruensrelationen är *transitiv*.

I det här exemplet ovan arbetade vi med kongruenser modulo 7, men självklart gäller precis samma resonemang för allmänna kongruensrelationer då vi alltså relaterar tal till varandra som är kongruenta modulo n för vilket fixt n som helst.

Exempel: Vi införde nyss kongruensrelationen som var baserad på vårt tidigare arbete med kongruenser. Vi ska nu införa en till relation också baserad på vårt tidigare arbete med delbarhet. Vi definierar relationen R på mängden av alla *positiva* heltal. Den här mängden brukar också kallas de *naturliga talen* och betecknas $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Definiera alltså

$$xRy \Leftrightarrow x|y.$$

Vi kallar denna relation för *delbarhetsrelationen*. Det naturliga talet x är alltså relaterat till det naturliga talet y om och endast om x delar y. Vi undersöker vilka egenskaper den här relationen har.

(1) Reflexivitet? Gäller det att $x|x$ för alla naturliga tal? Jadå, som vi sett i teorin kring delbarhet så är varje tal delbart med sig själv så kravet på reflexivitet är uppfyllt.

(2) Symmetri? Gäller $x|y \Leftrightarrow y|x$? Eller kan vi hitta något exempel på naturliga tal där $x|y$ men $y \nmid x$? Knäck detta själv!

(3) Antisymmetri? Har vi $x|y \wedge y|x \Rightarrow x = y$? Vi undersöker saker och antar därför att $x|y \wedge y|x$. Då finns heltal k_1 och k_2 som måste vara naturliga sådana att

$$x = k_1 y \qquad \text{och} \qquad y = k_2 x.$$

Men nu kan vi sätta in värdet på y från den andra ekvationen i den första. Det ger

$$x = k_1 y = k_1 k_2 x \Rightarrow x = k_1 k_2 x \Rightarrow k_1 k_2 = 1.$$

Produkten av de båda naturliga talen k_1 och k_2 blir alltså 1. Den enda möjligheten till detta är om $k_1 = k_2 = 1$ (annars skulle produkten $k_1 k_2 > 1$). Men om $k_1 = k_2 = 1$ så följer också att $x = y$, det vill säga vi har visat antisymmetri.

(4) Slutligen studerar vi transitivitet. Vi ska återigen här försöka visa implikationen

$$x|y \wedge y|z \Rightarrow x|z$$

så vi antar att $x|y \wedge y|z$. Återigen kan vi då säga att det finns k_1 och k_2 sådana att

$$y = k_1 x \qquad \text{och} \qquad z = k_2 y$$

och vi sätter återigen in värdet på y från den ena ekvationen i den andra. Det ger oss

$$z = k_2 y = k_2(k_1 x) = (k_1 k_2)x$$

vilket visar att $x|z$, det vill säga vi *har* transitivitet.

Övningar

Finan: Exempel 18.1, Exempel 18.2, Exempel 18.3, Exempel 18.4, Exempel 18.5, Exempel 18.6, Exempel 18.8, Exempel 18.9, Exempel 18.10, Exempel 18.11, Exempel 18.12, Exempel 18.13, Exempel 18.14. Problem 18.1, Problem 18.3, Problem 18.4, Problem 18.5, problem 18.6, Problem 18.7, Problem 18.9.

5.1.1 Finns det någon relation definierad på en mängd som har *alla* fyra egenskaper *reflexivitet*, *symmetri*, *antisymmetri* och *transitivitet*? Om du har hittat en sådan relation, kan du hitta en till?

2. Ekvivalensrelationer

Detta avsnitt fokuserar på relationer som har de tre egenskaperna reflexivitet, symmetri och transitivitet. Dessa relationer kallas ekvivalensrelationer och vi ger en formell defintion av dessa.

Definition: Låt R vara en relation på en mängd A. Om R är reflexiv, symmetrisk och transitiv så kallas R en *ekvivalensrelation* på A.

Vi har sett en ekvivalensrelation, det var den ovan som var given av

$$xRy \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 7 \cdot k.$$

Med delbarhetsnotationen kunde vi också skriva det så här

$$xRy \Leftrightarrow 7|x - y,$$

det vill säga 7 delar $x - y$ och det här var precis kongruenserna som vi sett ännu tidigare, det vill säga det var helt enkelt samma sak som $x \equiv y \pmod 7$. Kongruensrelationen $x \equiv y \,(\mathrm{mod}\ 7)$ är alltså en ekvivalensrelation, men, som vi också noterade förut, det var ju förstås ingenting som var speciellt med 7, $x \equiv y \,(\mathrm{mod}\ n)$ blir en ekvivalensrelation för alla värden på n.

Vi ska nu undersöka den här relationen. Vilka tal är relaterade till 0? Vi studerar mängden av alla tal som är relaterade till 0 och tecknar ett uttryck för den:

$$\{x \in \mathbb{Z}; 7|(x - 0)\} = \{x \in \mathbb{Z}; \exists k \in \mathbb{Z} : x = 7 \cdot k\}$$

Men det här är helt enkelt mängden av alla multiplar av 7, det vill säga $\{0, \pm 7, \pm 2 \cdot 7, \pm 3 \cdot 7, \ldots\}$. Vanligtvis säger vi att alla dessa tal ger *resten* 0 när vi dividerar dem med 7, och i vår terminologi med kongruenser säger vi att det här är alla tal kongruenta med 0 modulo 7. Vi har tidigare också infört namnet *kongruensklassen* och betecknat denna mängd med $\overline{0}$. (Eller *restklassen* $\overline{0}$.)

Vi fortsätter undersökningen av den här relationen och frågar oss, vilka tal är kongruenta med 1? För att hitta de talen tecknar vi återigen dem som en mängd och det blir

$$\{x \in \mathbb{Z}; 7|(x - 1)\} = \{x \in \mathbb{Z}; \exists k \in \mathbb{Z} : x - 1 = 7 \cdot k\} = \{x \in \mathbb{Z}; \exists k \in \mathbb{Z} : x = 7 \cdot k + 1\}$$

Och det här är mängden av multiplar av 7 fast med 1 adderat, det vill säga $\{0+1, \pm 7+1, \pm 2\cdot 7+1, \pm 3\cdot 7+1, \ldots\}$. Och på liknande sätt säger vi att det här är talen som ger resten 1 vid division med 7. Denna klass kallas då också kongruensklassen $\overline{1}$. (Eller *restklassen* $\overline{1}$.)

Vi kan fortsätta på precis samma sätt med talen 2, 3, 4, 5 och 6 och hitta fem till kongruensklasser som dessa tal ingår i. Dessa blir

$$\{0 + 2, \pm 7 + 2, \pm 2 \cdot 7 + 2, \ldots\}, \{0 + 3, \pm 7 + 3, \pm 2 \cdot 7 + 3, \ldots\}, \{0 + 4, \pm 7 + 4, \pm 2 \cdot 7 + 4, \ldots\},$$

$$\{0 + 5, \pm 7 + 5, \pm 2 \cdot 7 + 5, \ldots\}, \{0 + 6, \pm 7 + 6, \pm 2 \cdot 7 + 6, \ldots\}.$$

och med strecknotationen betecknas dessa $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{5}$ och $\overline{6}$.

Den mycket intressanta frågan nu är, finns det några mer kongruensklasser? Vilka tal är till exempel kongruenta med 7? Vi har ju inte provat 7. Eller har vi det? Talet 7 själv är ju en multipel av 7 så den *ingår redan* i kongruensklassen $\overline{0} = \{0, \pm 7, \pm 2 \cdot 7, \pm 3 \cdot 7, \ldots\}$ och om ett tal är kongruent med 7 så är det också kongruent med 0 så vi *får inget nytt* genom att söka efter tal kongruenta med 7, vi kommer bara tillbaka till klassen $\overline{0}$ då. På precis samma sätt ser vi att tal kongruenta med 8 i själva verket blir talen som är kongruenta med 1 så att vi har $\overline{8} = \overline{1}$. Så det finns inga nya kongruensklasser, alla heltal kommer att hamna i någon av kongruensklasserna

$$\overline{0} = \{0, \pm 7, \pm 2 \cdot 7, \pm 3 \cdot 7, \ldots\}, \overline{1} = \{0 + 1, \pm 7 + 1, \pm 2 \cdot 7 + 1, \pm 3 \cdot 7 + 1, \ldots\}$$

$$\overline{2} = \{0+2, \pm 7+2, \pm 2\cdot 7+2, \ldots\}, \overline{3} = \{0+3, \pm 7+3, \pm 2\cdot 7+3, \ldots\}, \overline{4} = \{0+4, \pm 7+4, \pm 2\cdot 7+4, \ldots\},$$
$$\overline{5} = \{0+5, \pm 7+5, \pm 2\cdot 7+5, \ldots\} \quad \text{och} \quad \overline{6} = \{0+6, \pm 7+6, \pm 2\cdot 7+6, \ldots\}.$$

Det betyder att dessa 7 klasser skapar en *partionering* av $\mathbb{Z}$. Vi har förstått hur denna partitionering uppstått genom den talteoretiska undersökningen som vi just genomfört.

Men nu ska vi se att den här egenskapen – att en relation skapar en partitionering av den mängd som den är definierad på – är en egenskap hos *alla* ekvivalensrelationer. Vi ska alltså använda de tre kritiska egenskaperna reflexivitet, symmetri och transitivitet för att visa att varje ekvivalensrelations ger upphov till en partitionering av den underliggande mängden.

Vi inför först en mer generell notation.

Notation: För en ekvivalensrelation uttrycker vi ofta det faktum att två element a och b är relaterade med tildenotation, vi skriver då $a \sim b$. Vi använder också tildesymbolen ($\sim$) för att referera till ekvivalensrelationen själv, alltså kan vi säga "relationen $\sim$". De tre egenskaperna som karakteriserar en ekvivalensrelation kan nu uttryckas med hjälp av tildenotationen på följande sätt:

reflexivitet: $a \sim a$
symmetri: $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$
transitivitet: $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$

vi underförstår att detta ska gälla för godtyckliga val av $a, b, c \in A$ som förstå är den mängd som $\sim$ är definerad på.

Vi introducerar mer terminologi för saker som vi egentligen redan sett:

Definition: Låt $\sim$ vara en ekvivalensrelation definierad på en mängd A och låt a vara ett godtyckligt element i A. Om a är relaterat till $b \in A$ (dvs $a \sim b$) så säger vi också att a och b är *ekvivalenta.* Mängden av alla element som är ekvivalenta med a kallas *as ekvivalensklass* och vi skriver den som $\overline{a}$. Mängden av ekvivalensklasser (som alltså är en mängd av mängder) hörande till $\sim$ skrivs $A/\!\sim$ och detta utläses "A över $\sim$".

Exempel: Ovan studerade vi ekvivalensrelationen $a \sim b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod 7$ och där hade vi ekvivalensklasserna $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{5}$ och $\overline{6}$ men vi kunde också kalla dessa för kongruensklasser eller restklasser.

Vi ska nu snart visa den allmänna satsen att en ekvivalensrelation skapar en partionering men vi behöver först en egenskap gällande ekvivalensklasser.

Sats: Låt $\sim$ beteckna en ekvivalensrelation på en mängd A. Då gäller, för alla element $x, a \in A$ att

$$x \sim a \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{a}.$$

Det här betyder alltså att två element x och a är ekvivalenta om och endast om de är i samma ekvivalensklass.

Bevis: Vi ska visa en ekvivalens det vill säga vi ska visa implikation åt två håll. Antag först att $\bar{x} = \bar{a}$. Eftersom $x \sim x$ (reflexivitet) så gäller $x \in \bar{x}$. Men enligt antagandet gäller $\bar{x} = \bar{a}$ så vi har alltså

$$x \in \bar{x} = \bar{a}$$

vilket precis betyder $x \sim a$ vilket vi ville visa.

Antag nu omvänt att $x \sim a$ och visa att $\bar{x} = \bar{a}$. Vi ska alltså visa att två mängder ($\bar{x}$ och $\bar{a}$) är lika. För att visa att två mängder S_1 och S_2 är lika ska vi visa $S_1 \subset S_2$ och $S_2 \subset S_1$, det vill säga vi vill nu visa $\bar{a} \subseteq \bar{x}$ och $\bar{x} \subseteq \bar{a}$. För att visa en mängdinklusion så ska vi visa en implikation. Så antag att $y \in \bar{x}$. Då gäller $y \sim x$ och $x \sim a$ (det var ju antagandet). Enligt transitivitet har vi då $y \sim a$ det vill säga $y \in \bar{a}$. Vi har alltså visat att $y \in \bar{x} \Rightarrow y \in \bar{a}$. Detta innebär precis att $\bar{x} \subset \bar{a}$. Det återstår att visa inklusion åt andra hållet så antag därför att $y \in \bar{a}$, då gäller $y \sim a$. Enligt antagandet hade vi $x \sim a$. Enligt symmetri får vi då $a \sim x$ och detta tillsammans med $y \sim a$ och transitivitet ger oss $y \sim x$, det vill säga $y \in \bar{x}$. Alltså har vi visat $y \in \bar{a} \Rightarrow y \in \bar{x}$ som ger $\bar{a} \subset \bar{x}$. Sammantaget har vi visat $\bar{x} = \bar{a}$ och beviset är klart.

Den sista satsen visar en mycket viktig egenskap hos ekvivalensklasser: *vi kan välja vilket element som helst i en ekvivalensklass och det elementet bestämmer då hela klassen.* Vi kan därför tala om en *representant* för en ekvivalensklass och vilket element som helst i en ekvivalensklass kan fungera som representant för den klass som den ligger i. I exemplet ovan med kongruensklasser modulo 7 så kan vi välja vilket tal som helst, till exempel 15. Detta tal ligger i en ekvivalensklass och alla andra tal i denna ekvivalensklass ger samma rest vid division som 15 vid division med 7.

Nu kan vi formulera satsen om partitioneringar som uppkommer av ekvivalensrelationer.

Sats: Antag att $\sim$ är en ekvivalensrelation definierad på mängden A. Då utgör mängden av ekvivalensklasser, alltså $A/\sim$, en partitionering av A.

Bevis: Om vi betecknar en ekvivalensklass i $A/\sim$ med C och unionen av alla ekvivalensklasser med $\cup_{C\in A/\sim}C$ så ska vi visa två saker:
(1) $\cup_{C\in A/\sim}C = A$.
(2) Alla ekvivalensklasser är parvis disjunkta.
Om de här två villkoren gäller så utgör mängden av ekvivalensklasser $(\cup_{C\in A/\sim}C)$ en partitionering av A.

För att visa första villkoret konstaterar vi att för alla element $a \in A$ gäller att $a \in \bar{a}$, det vill säga alla element i A är innehållna i åtminstone *en* ekvivalensklass. Det betyder att

$$A \subset \cup_{C\in A/\sim}C.$$

Men omvänt kan vi också konstatera att alla element i alla ekvivalensklasser *kommer* från A så vi har även

$$\cup_{C\in A/\sim}C \subset A.$$

Och dessa två inklusioner ger oss $\cup_{C\in A/\sim}C = A$.

För att visa att alla ekvivalensklasser är parvis disjunkta kan vi visa att så fort två ekvivalensklasser har ett gemensamt element a så är de samma klass. Antag alltså att de två ekvivalensklasserna C_1 och C_2 har ett gemensamt element a. Eftersom varje ekvivalensklass kan representeras av varje enskild medlem måste vi alltså ha $C_1 = \bar{a} = C_2$ det vill säga klasserna sammanfaller. Det betyder att två *olika* ekvivalensklasser alltid måste sakna gemensamma element, det vill säga det är parvis disjunkta. Detta visar också andra villkoret och beviset är klart.

Exampel: Vi tar en sista återblick på exemplet med kongruenser modulo 7. Partitioneringen av $\mathbb{Z}$ i kongruensklasserna (som är ekvivalensklasserna för kongruensrelationen) beskrivs då av

$$\mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2} \cup \bar{3} \cup \bar{4} \cup \bar{5} \cup \bar{6}$$

och $\mathbb{Z}/\sim$ där $\sim$ är kongruensrelationen har vi tidigare kallat $\mathbb{Z}_7$.

Övningar

Finan: Exempel 18.15 (egentligen redan löst i texten ovan, men läs igenom ändå.), Problem 18.10, Problem 18.11, Problem 18.12, Problem 18.13, Problem 18.14.

3. Partiella ordningsrelationer

Vi ska nu studera en generalisering av ordningsrelationerna. Det visar sig att en binär relation med egenskaperna reflexivitet, antisymmetri och transitivitet modellerar precis det här med att olika element kan *jämföras* med varandra. Så vi tar en definition.

Definition: En *partiell ordningsrelation* på en mängd A är en binär relation som är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv. En *partiellt ordnad mängd* är ett par $(A, \preceq)$ där A är en mängd och $\preceq$ är en partiell ordningsrelation definierad på A. Två element $a, b \in A$ sägs vara *jämförbara* om antingen $a \preceq b$ eller $b \preceq a$. Om varje par av element valda ur A är jämförbara så kallas $(A, \preceq)$ för en *totalt ordnad mängd* och $\preceq$ kallas då en *total* ordning på A.

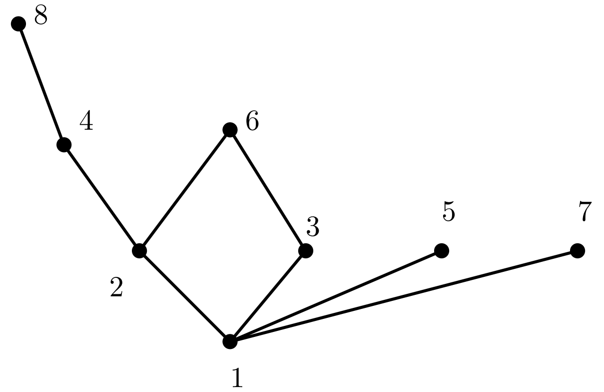
Vi studerar ett antal exempel.

Exampel: Självklart kan vi välja den vanliga ordningsrelationen, $\leq$, som är en partiell ordningsrelation, tillsammans med vilken mängd av tal som helst. Då uppstår en partiellt ordnad mängd. Den här relationen är förstås också en total ordning på vilken mängd som helst. Kontrollera själv att relationen $\leq$ är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv.

Exempel: Tidigare har vi sett att delbarhetsrelationen betraktad på alla naturliga tal har egenskaperna reflexivitet, antisymmetri och transitivitet. Det betyder att $(\mathbb{N}, |)$ är en partiellt ordnad mängd. Den är däremot inte totalt ordnad eftersom vi till exempel varken har $5|7$ eller $7|5$, elementen 5 och 7 i $\mathbb{N}$ är alltså *inte* jämförbara.

Exempel: Vi kan relatera mängder till varandra via delmängdsrelationen $\subset$ och vilken uppsättning mängder som helst tillsammans med delmängdsrelationen bildar en partiellt ordnad mängd.

Innan vi inför mer begrepp för partiellt ordnade mängder ska vi införa en intressant teknik för visualisering av partiella ordningsrelationer som går under namnet *Hassediagram.* I ett sådant diagram kan vi illustrera ändliga mängder som har en partiell ordningsrelation definierad på sig. Elementen i mängden representeras som noder (eller synonymt *punkter*) och noderna förbinds med bågar som illustrerar att element som representeras av noderna är relaterade. Vi tar ett exempel. Vi använder delbarhetsrelationen $|$ definierad på den ändliga mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Den partiellt ordnade mängden kan då illustreras med följande Hassediagram:



Vi ser att diagrammet har 8 noder, en för varje heltal 1 till och med 8. Att två tal är relaterade enligt ordningsrelationen symboliseras av att de är förbundna med en båge *eller* följd av bågar/noder. Här är dock riktningen viktig, ordningsrelationen är *riktad* och i diagrammet uttrycks det genom att noder är relaterade endast till noder som ligger *uppåt* i diagrammet. Till exempel gäller $1|2$, $1|3$, $1|5$ och $1|7$ och detta uttrycks genom att bågar (eller snarare räta linjer) är inritade från noden som representerar 1 till alla de noder som representerar 2, 3, 5 och 7. Men vi vet också att $1|4$ och ja, 1 delar ju varje annat tal och att till exempel $1|4$ representeras av att ytterligare en båge finns från 2 till 4. Denna båge representerar då dels att $2|4$ men också att $1|4$ eftersom vi kan se bågen mellan 2 och 4 som en fortsättning på bågen från 1 till 2. Detta illustrerar också egenskapen *transitivitet* hos ordningsrelationen. I den här grafiska framställningen av diagrammet verkar det som om 8 ligger högre upp än till exempel 7, men eftersom varken $7|8$ eller $8|7$ gäller är de inte jämförliga. Element är bara jämförliga om de ligger på samma följd av bågar som inte vänder från att gå bara uppåt eller bara nedåt. Till exempel är 1, 2, 6 jämförbara eftersom de ligger på en följd av bågar som går uppåt, men nodföljden 2, 1, 3 är visserligen förbundna med bågar men det innebär inte att 2 och 3 är jämförbara eftersom vi så att säga vänder i 1.

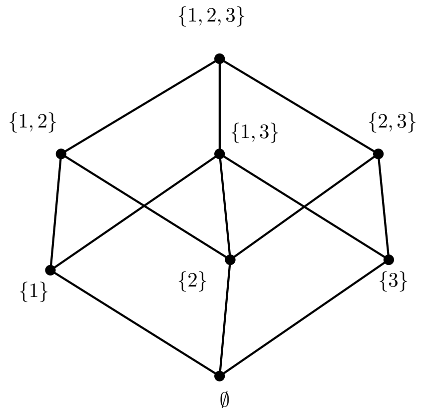
Vi gör nu en definition av minimalitet/maximalitet i en partiellt ordnad mängd.

Definition: Låt $(A, \preceq)$ vara en partiellt ordnad mängd.

(1) Ett element $a \in A$ kallas ett *maximum* omm $b \preceq a$ för alla $b \in A$.
(2) Ett element $a \in A$ kallas ett *minimum* omm $a \preceq b$ för alla $b \in A$.
(3) Ett element $a \in A$ kallas *maximalt* omm $b \in A \wedge a \preceq b \Rightarrow b = a$.
(4) Ett element $a \in A$ kallas *minimalt* omm $b \in A \wedge b \preceq a \Rightarrow b = a$.

Det här betyder att ett maximum i en partiellt ordnad mängd är inte bara jämförbart med alla andra element i mängden, men det har också egenskapen att det är störst. Ett maximalt element behöver inte vara störst, men det är störst i alla fall bland de element som det är jämförbart med. Om vi betraktar Hassediagrammet för den partiellt ordnade mängden $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, |)$ ovan så ser vi att elementet 1 är ett minimum och därmed är 1 också ett minimalt element. Men vi saknar ett maximum. Dock finns flera maximala element, nämligen 3, 5, 6, 7 och 8.

Vi ritar ett Hassediagram över den partiellt ordnade mängden $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}, \subset)$, alltså potensmängden av $\{1, 2, 3\}$ under delmängdsrelationen.



Här ligger alltså $\{1, 2, 3\}$ i toppen som då blir ett maximum (och blir därmed också ett maximalt element). Tomma mängden ligger i botten som ett minimum (och blir därmed också ett minimalt element).

Övningar

Finan: Exempel 19.1, Exempel 19.2, Exempel 19.3, Exempel 19.5, Exempel 19.7, Exempel 19.8 ($\mathbb{N}^*$ kan uppfattas som alla positiva heltal), Problem 19.2, problem 19.3, Problem 19.4, Problem 19.5.