KAPITEL 2 - MÄNGDLÄRA

1. Mängder och deras element

Det centrala i mängdläran är förstås mängden. En mängd är en samling objekt. Objekten kan vara tal, matriser, vektorer, eller världsliga ting som bilar eller personer. Vi ska börja tala om detta på ett mer noggrannt sätt så vi gör en definition och inför ett par sätt att skriva.

Definition 2.1: En *mängd* är en samling objekt. Objekten kallas *element* och mängden sägs *bestå* av sina element. En mängd är helt bestämd av de element som ingår och det måste finnas ett sätt att entydigt avgöra om ett objekt är ett element i mängden eller ej. Om en mängd betecknas med M skriver vi $x \in M$ för att beteckna att elementet x tillhör M. Vi skriver vidare $x \notin M$ för att beteckna att x inte tillhör M. Vi kan ange en mängd genom att räkna upp dess element. Då används skrivsättet $M = \{a, b, c, \dots\}$ där a, b och c betecknar ingående element i M. Ibland kan verkligen också symbolerna "$\dots$", de tre punkterna efter varandra, vara med och definiera innehållet i en mängd när mängdens element bildar ett tydligt mönster.

Exempel: Låt M vara mängden av alla positiva udda heltal. Då är $M = \{1, 3, 5, \dots\}$. Vidare vet vi då att $5 \in M$, $7 \in M$, men till exempel gäller $2 \notin M$ och $-7 \notin M$.

I en mängd finns ingen inbördes ordning mellan elementen. Alltså är mängderna $\{1, 2, 3\}$ och $\{2, 3, 1\}$ precis samma mängd och vi kan alltså skriva $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$. Vidare kan varje element bara förekomma högst en gång i varje mängd. Därför anser vi att mängden $\{1, 2, 1, 3, 4\}$ egentligen är mängden $\{1, 2, 3, 4\}$.

Vi kommer att se *mycket* stora likheter mellan mängdläran och logiken. Vi kan se ett första uttryck för dessa likheter i föregående stycke. Där hävdades att ett element bara kan förekomma i en mängd "högst en gång". Betrakta mängden $\{1, 2, 3\}$. Den innehåller elementen 1, 2 och 3. Det betyder att utsagorna $1 \in \{1, 2, 3\}$, $2 \in \{1, 2, 3\}$ och $3 \in \{1, 2, 3\}$ alla har sanningsvärdet sann. Och vi kan förstås också teckna falska utsagor som involverar samma mängd, till exempel $4 \in \{1, 2, 3\}$ och $5 \in \{1, 2, 3\}$. Så fort vi har en mängd M så är alltså $x \in M$ en utsaga som antingen är sann eller falsk. Vi lägger märke till att vi har en motsvarighet till *utsagor* här: just precis att det måste finnas ett enytdigt sätt att avgöra om ett objekt är ett element i en mängd eller ej svarar exakt mot kravet som vi ställde på utsagor, att de ska vara sanna eller falska.

Det finns en möjlighet att en mängd inte innehåller några element alls. En sådan mängd kallas tom och det finns bara en sådan mängd som då brukar kallas "den tomma mängden". Vi gör en definition och inför ett skrivsätt.

Definition 2.2: *Den tomma mängden* är den mängd som inte har några element alls. Vi betecknar den med symbolen $\emptyset$.

Eftersom $\emptyset$ inte innehåller några element kan det aldrig vara uppfyllt att $x \in \emptyset$ för något element x alls. Utsagan $x \in \emptyset$ är alltså alltid falsk. Däremot gäller $x \notin \emptyset$ för alla objekt x och utsagan $x \notin \emptyset$ är alltså alltid sann.

Vi ska nu införa ett par standardmässiga mängder som kommer att finnas med oss i resten av framställningen. Vi gör detta i form av en definition.

Definition 2.3: Följande skrivsätt dedikeras till följande standardmässiga mängder:

$\mathbb{N}$ = mängden av alla *Naturliga tal*, det vill säga $\{1, 2, 3, \dots\}$. Denna mängd kan också kallas "alla positiva heltal". (Ibland anses även talet 0 ingå bland de naturliga talen.)
$\mathbb{Z}$ = mängden av alla *Heltal*, det vill säga $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
$\mathbb{Q}$ = mängden av alla *Rationella tal*, det vill säga mängden av alla bråktal alltså alla tal som kan skrivas på formen a/b där b förstås inte kan vara 0.
$\mathbb{R}$ = mängden av alla *Reella tal*, det vill säga alla tal som vi behöver då vi skapar matematik och ingenjörskonst, de rationella talen räcker inte till, exempelvis är talet $\sqrt{2}$ inte rationellt. (Det är dessa tal som vi är vana att arbeta med från kurser i matematisk analys.)

För samtliga dessa talmängder kan vi ibland välja att exkludera alla icke-positiva tal från mängden genom att lägga till ett "+". Med detta skrivsätt blir då $\mathbb{R}^+$ = mängden av alla positiva reella tal och $\mathbb{Z}^+$ = alla positiva heltal (som ju är de naturliga talen – $\mathbb{N}$).

Vi ska utvidga skrivsättet för mängder genom att skriva på följande sätt:

$$\{\text{element} : \text{logisk beskrivning av hur elementet bildas}\}$$

Vi använder alltså klamrar och innanför vänstra klammern ({) anger vi de element som finns i mängden. Sedan fortsätter vi med ett kolon (:) och efter det anges en beskrivning på hur de element som ingår i mängden bildas. Denna beskrivning kan använda sig av satslogik och vi kan alltså bilda utsagor som beskriver krav på elementen. Vi avslutar sedan med en högerklammer. Här följer ett par exempel på detta.

Exempel: Vi bildar mängden

$$M = \{x : x \in \mathbb{Z} \wedge x > 4\}.$$

Denna mängds element betecknar vi alltså med x och vi bildar x genom att följa de anvisningar som finns efter kolonet. Där står det att x ska väljas bland de hela talen (mängden $\mathbb{Z}$) och att x ska väljas större än 4. Det innebär att M blir denna mängd: $\{5, 6, 7, 8, \dots\}$ det vill säga alla heltal från och med 5.

Exempel: Vi bildar mängden

$$M = \{2 \cdot x : x \in \mathbb{Z} \wedge x > 3\}.$$

Den här mängden bildas genom att vi tar alla heltal x större än 3, det vill säga talen 4, 5, 6, ... och multiplicerar alla dessa tal med 2. Mängden M består därför av elementen $\{2 \cdot 4, 2 \cdot 5, 2 \cdot 6, \dots\}$ som alltså bildar mängden $\{8, 10, 12, \dots\}$ det vill säga alla jämna heltal från och med 8.

Övning

2.1.1 Låt $\mathbb{Z}$ beteckna mängden av alla heltal. Vilka mängder är lika?:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{0, 2, 4, 6, \dots\}, \\
M_2 &= \{1, 3, 5, \dots\}, \\
M_3 &= \{0, 5, 10, 15, \dots\}, \\
M_4 &= \text{Mängden av alla udda heltal}, \\
M_5 &= \text{Mängden av alla positiva heltal, inklusive } 0, \\
M_6 &= \{2 \cdot k : k \in \mathbb{Z}\}, \\
M_7 &= \{2 \cdot k : k \in \mathbb{Z} \text{ och } k \geq 0\}, \\
M_8 &= \{2 \cdot k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}, \\
M_9 &= \{2 \cdot k + 1 : k \in \mathbb{Z} \wedge k \geq 0\}, \\
M_{10} &= \{5 \cdot n : n \in \mathbb{Z} \text{ och } n \geq 0\}, \\
M_{11} &= \text{Mängden av alla jämna heltal.}
\end{aligned}$$

2. Delmängder

Ofta vill vi uttrycka att de element som finns i en viss mängd A också finns i en annan mängd B. Det skulle till exempel vara fallet om vi hade $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Detta betyder att hela mängden A är *innesluten* i B eller att mängden A är en del av mängden B. Till exempel är mängden av alla udda positiva heltal innesluten i mängden av alla positiva heltal. Vi ger även en formell definition:

Definition 2.4: Låt A och B vara två mängder. Om varje element i A även finns i B säger vi att A är *innesluten* i B eller att A är en *delmängd* av B. Vi skriver detta så här: $A \subset B$.

Exempel: Låt A vara mängden av alla udda positiva heltal, det vill säga låt $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$. Då gäller $A \subset \mathbb{Z}$, det vill säga A är en delmängd av mängden av alla heltal. Vi kan också skriva $A \subset \mathbb{N}$ eller $A \subset \mathbb{Q}$.

Exempel: Vi kan kaskadkoppla delmängdssymbolen för att uttrycka att en mängd kan vara delmängd av en mängd som i sin tur är delmängd av en annan ännu större mängd. Vi kan därför skriva (med samma A som i förra exemplet):

$$\emptyset \subset A \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

vilket betyder att tomma mängden är delmängd av A som i sin tur är delmängd av mängden av de naturliga talen som i sin tur är delmängd av mängden av alla heltal och så vidare.

Om delmängdsrelationen mellan två mängder är uppfylld (det vill säga, helt enkelt om $A \subset B$, som till exempel om $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$) så kan detta ges en satslogisk tolkning. Om vi låter x beteckna ett element i A så är $A \subset B$ samma sak som att $x \in A \Rightarrow x \in B$, det vill säga ”delmängd” hänger ihop med implikation.

Tomma mängden, $\emptyset$, anses vara delmängd av varje annan mängd, det vill säga, för alla mängder M gäller $\emptyset \subset M$. Det stämmer också överens med den satslogiska tolkningen som nämndes precis ovan, eftersom implikationen $x \in \emptyset \to x \in M$ alltid har ett falskt förled, utsagan $x \in \emptyset$ är ju alltid falsk, vilket innebär att hela implikationen blir sann oavsett vad M är. Det innebär alltså att implikationen gäller för alla möjliga mängder M det vill säga $\emptyset$ är delmängd av vilken mängd som helst. Tomma mängden är förstås den *enda* mängd som har denna egenskap.

Anmärkning: I andra framställningar av mängdläran används symbolen ”$\subseteq$” för att beteckna delmängder. Denna symbol är en sammanslagning mellan likhetstecknet ”$=$” och ”$\subset$” och är tänkt att indikera att likhet mellan mängderna också kan råda. Varje mängd är ju en delmängd av sig själv och beteckningen $A \subseteq B$ betyder således ”A är en delmängd av B eller så är mängderna A och B lika”. Vi gör inte den distinktionen i denna framställning utan använder genomgående symbolen $\subset$ för att beteckna delmängder och vi inkluderar också möjligheten att mängderna A och B är lika då vi skriver $A \subset B$.

Då det gäller likhet mellan mängder så inträffar detta precis då de båda är delmängder av varandra. Mer precist, om A och B är två mängder så gäller $A = B$ om och endast om $A \subset B$ *och* $B \subset A$. Vi kan ge detta samma satslogiska tolkning som ovan genom att konstatera att två mängder A och B är lika om och endast om de har samma element, det betyder att alla element som finns i A ska också finnas i B – det vill säga $A \subset B$, *och* alla element som finns i B ska också finnas i A – det vill säga $B \subset A$. Men $A \subset B$ betyder ju att $x \in A \Rightarrow x \in B$ och $B \subset A$ betyder ju att $x \in B \Rightarrow x \in A$ och dessa två tillsammans blir $x \in A \Leftrightarrow x \in B$, det vill säga mängderna A och B har exakt samma element.

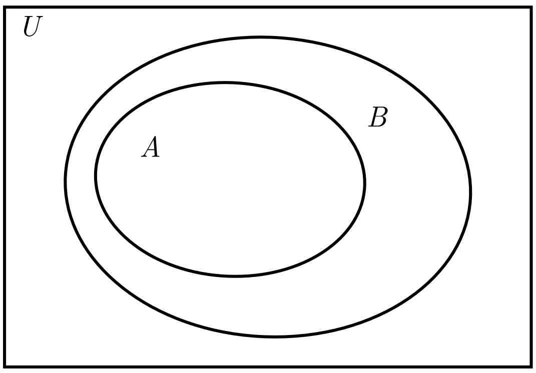
Övning

2.2.1 *(före detta 2.4.1.)* Ange vilka delmängdsförhållanden som finns mellan mängderna $M_1 - M_{11}$ i uppgift 2.1.1. (Till exempel gäller $M_1 \subset M_5$.)

3. Venndiagram och universum

Matematikern John Venn (1834-1923) kom på ett sätt att åskådliggöra mängder och deras inbördes relationer. Han uppfann alltsåde så kallade Venndiagrammen och i Venndiagram tänker vi oss mängderna som om de var inneslutna i en stor allomfattande mängd som kallas universum och den ska vi beteckna med U.

Ett Venndiagram som åskådliggör en delmängdsrelation mellan två mängder A och B ges i nedanstående figur.



Figuren symboliserar att $A \subset B$ och därför har vi symboliserat mängderna A och B med ellipser där den ellips som symboliserar A ligger innanför den ellips som symboliserar B.

I många matematiska problemställningar finns en allomfattande mängd som innehåller alla de objekt som är relevanta för studiet av den aktuella problemställningen – det är just en sådan här universummängd som är betecknad med U i ovanstående diagram. Det finns också teoretiska skäl till att införa en allomfattande mängd som vi kommer att beröra senare. Det betyder att en allomfattande mängd, som vi kallar universum och som betecknas med U i ovanstående Venndiagram, är en mycket naturlig konstruktion. Vi tar ett par exempel på situationer där vi har en allomfattande mängd som innehåller alla objekt som beaktas och som kan illustreras med ovanstående Venndiagram.

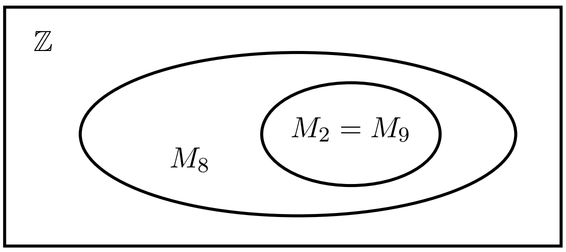
Exempel: I linjär algebra studerar vi linjer och plan som kan betraktas som mängder av punkter. Det kan då vara lämpligt att låta universum, U, vara mängden av alla punkter, denna ”mängd av alla punkter” har vi i linjär algebra tidigare betecknat med $\mathbb{R}^3$. I Venndiagrammet ovan har vi som sagt en illustration av en mängd, A, som är innesluten i en annan, B, och att dessa två mängder i sin tur är inneslutna i ett universum U. En situation där detta uppkommer är om A är en linje som ligger i ett plan B och detta plan i sin tur är inneslutet i rummet av alla punkter som då blir universum U. Venndiagrammet ovan beskriver givetvis inte geometriska förhållanden, men fungerar bra för att illustrera de mängdteoretiska förhållandena mellan linjen (mängden A), planet (mängden B) och hela rummet $\mathbb{R}^3$ (mängden U).

Exempel: Vi kan låta U beteckna alla studenter i hela världen, B beteckna studenterna i Sverige och A beteckna studenter vid KTH. Dessa tre mängder kan också beskrivas med Venndiagrammet ovan. $A \subset B$ och $B \subset U$ som också med kaskadkoppling kan skrivas $A \subset B \subset U$.

Styrkan med mängdläran (och all matematik) är att samma principer kan användas för att modellera, illustrera och dra slutsatser kring vitt skilda problemställningar. Samma Venndigramm kan alltså vara användbart vid studium av linjär algebra och vid studium av studenter. Vi kommer att löpande använda Venndiagram för att illustrera olika mängdteoretiska begrepp. Vi måste dock vara återhållsamma när vi ska skapa bevis för mängder. Här kommer inte Venndiagram vara acceptabla eftersom de utgör pedagogiska instrument och det är svårt att i exakta matematiska termer beskriva precis vad ett Venndiagram är. Venndiagram kan dessutom ibland ritas på ett felaktigt sätt och detta kan leda oss att tro att någonting gäller trots att det inte är sant.

Övning

2.3.1 *före detta 2.5.1* Universum för mängderna $M_1 - M_{11}$ i uppgift 2.1.1 är mängden av alla hela tal, det vill säga $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Illustrera delmängdsförhållandena från övning 2.2.1 med Venndiagram. Exempelvis gäller $M_2 = M_9 \subset M_8$ vilket kan illustreras i ett Venndiagram så här:



4. Operationer på mängder

I det här avsnittet och det följande kommer vi att införa fyra operationer på mängder. Dessa operationer kallas *union*, *snitt*, *komplement* och *mängddifferens*. Vi kommer att se starka likheter här mellan de tre första mängdoperationerna och de satslogiska operationerna disjunktion, konjunktion och negation.

4.1. **Union.** Vi studium av mängder behöver man ibland slå samman två (eller flera) mängder till en. Detta kallas *union* och är den första mängdoperationen som vi ska införa. Då man slår samman två mängder A och B får man en tredje mängd C som består av alla de element som ingår i A eller B. Det betyder att om ett element x förekommer både i A och B kommer elementet x endast att förekomma en gång i den sammanslagna mängden, minns att en mängd bara kan innehålla varje element högst en gång. Vi gör en ordentlig definition.

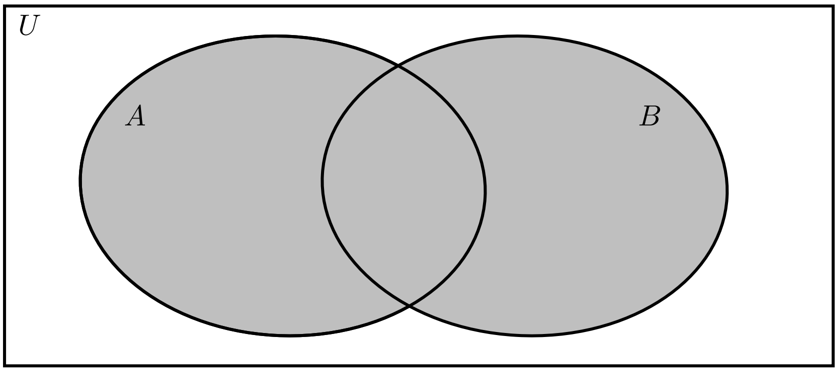
Definition 2.5: Låt A och B vara mängder. Med *unionen av A och B* menas då mängden C som innehåller precis alla element som ingår i A eller B. Vi skriver detta med unionstecknet ”$\cup$” som $C = A \cup B$.
Med klammernotation har vi $C = A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$.

Notera att det finns en *disjunktion* ($\vee$) i definitionen av union!

Exempel: Låt $A = \{1, 2, 3, 4\}$ och $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Då är $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. (Här har vi valt att inte beteckna unionen av A och B med en tredje symbol, C, som i definitionen, men vi skulle lika gärna ha kunna valt att sätta ett till namn (C) på $A \cup B$.)

Exempel: Låt A vara mängden av alla udda positiva heltal, det vill säga $A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ och låt B vara mängden av alla negativa udda heltal, det vill säga $B = \{-1, -3, -5, -7, \ldots\}$. Unionen av A och B blir då $A \cup B = \{\ldots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots\}$ det vill säga *alla* udda heltal.

Vi ska nu ge ett Venndiagram som illustrerar unionen mellan två mängder. Union är en operation som tar två mängder (här A och B) och ger en tredje mängd ($A \cup B$) som resultat. Vi vill att vårt Venndiagram ska illustrera hur denna tredje mängd ser ut i relation till de två givna mängderna. För att åstadkomma detta väljer vi att ge en färg till det område av diagrammet som respresenterar $A \cup B$ så i nedanstående diagram är den yta som representerar $A \cup B$ gråfärgad. (Inte mycket till "färg", men det fungerar förhoppningsvis!)



Vi ska ge några sista kommentarer angående unionoperationen.

För alla mängder A gäller $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$. Att ta unionen mellan mängden A och den tomma mängden innebär att slå ihop A med den mängd som inte innehåller några element alls och då tillför vi inga nya element. Tomma mängden har ju inga element så då får vi tillbaka A. Detta är precis i analogi med att alla tal x uppfyller $x + 0 = 0 + x = x$. Lägger vi på 0 på talet x får vi tillbaka x. Tomma mängden är alltså ett slags nolla bland mängder. Matematiskt sett brukar man säga att talet 0 är ett *neutralt element* under operationen addition och på samma sätt säger man att tomma mängden är ett neutralt element under operationen union.

4.2. **Snitt.** Med union kan vi alltså slå samman mängder och bilda nya mängder. Unionen av två mängder A och B innehåller alla element som ingår i *någon* av mängderna A och B som vi sett ovan. Det finns dock ofta anledning av bilda en mängd som innehåller elementen som finns i *både* A och B. Då bildar vi det så kallade *snittet* mellan A och B och det är nästa operation som vi inför.

Definition 2.6: Låt A och B vara två givna mängder. Med *snittet* mellan A och B menas då mängden C som innehåller alla element som ingår i *både* A och B. Vi skriver detta med snittecknet "$\cap$" som $C = A \cap B$. Med klammernotation har vi

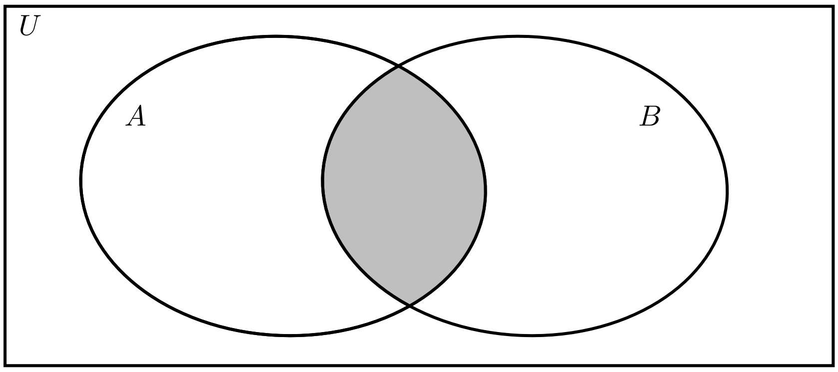
$$C = A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Och här noterar vi förstås att snittoperationen definieras med hjälp av en *konjunktion* ($\wedge$).

Exempel: Låt $A = \{1, 2, 3, 4\}$ och $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Då är $A \cap B = \{3, 4\}$ för 3 och 4 är de element som ingår i *både* A och B. (Här har vi valt att inte beteckna snittet av A och B med en tredje symbol som i definitionen, men vi skulle lika gärna ha kunna valt att sätta ett till namn, C, på $A \cap B$.)

Exempel: Låt A vara mängden av alla udda positiva heltal, det vill säga $A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ och låt B vara mängden av alla negativa udda heltal, det vill säga $B = \{-1, -3, -5, -7, \ldots\}$. Snittet av A och B blir då $A \cap B = \{\text{inga element alls}\} = \text{tomma mängden} = \emptyset$. Det finns ju inga tal som ligger i båda mängderna, och alltså måste snittet vara tomt.

På samma sätt som förut så studerar vi snittet mellan två mängder representerat i ett Venndiagram och det får då följande utseende:



och den mängd vi nu vill illustrera är mängden av element som ligger i *både* A och B, det betyder att området som är inneslutet av både gränsen kring respresentationen av A *och* gränsen kring representationen av B är det område som färgas. (Eller gråfärgas kanske vi skulle säga.)

På samma sätt som unionoperationen har en relation till tomma mängden så hänger snittoperationen samman med tomma mängden på följande sätt: För alla mängder A gäller $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$.

Att bilda snittet mellan en mängd A och tomma mängden $\emptyset$ innebär att bilda den mängd som innehåller elementen som ligger *både* i A och $\emptyset$. Men tomma mängden har ju *inga* element så då får vi inga element som ligger i båda mängderna. Mängden $A \cap \emptyset$ måste därför vara tomma mängden, $\emptyset$. Detta är precis i analogi med att alla tal x uppfyller $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ och vi ser återigen hur tomma mängden är lik talet 0.

Övningar

2.4.1 *före detta 2.2.1.* Låt fljande mngder vara givna:

$A = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
$B = \{x : x$ är udda heltal eller x är jämnt & positivt$\}$,
$C = \{x : x$ är udda & positivt eller x är ett jämnt heltal$\}$,
$D = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

Uttryck A, B, C och D som unioner av mngderna $M_1 - M_{11}$ i uppgift 2.1.1.

2.4.2 *före detta 2.3.1.* Ange följande mängder med klammernotation:

$$M_1 \cap M_2, M_1 \cap M_3, M_1 \cap M_4, M_1 \cap M_{10},$$

$$M_2 \cap M_7, M_2 \cap M_8, M_2 \cap M_{10}, M_2 \cap M_{11}.$$

Om någon av dem är tomma mängden, ange det.

2.4.3 Ange tre icketomma mängder av heltal A, B och C som har egenskapen

(a) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.
(b) $(A \cap B) \cup C \neq A \cap (B \cup C)$.

Undersök vad det är som gör skillnaden mellan de två situationerna.

5. Komplement

Då vi väljer ett universum U och studerar delmängder av detta universum är det ibland av intresse att bilda det så kallade *komplementet* av en mängd A. Komplementet av en mängd A är den delmängd av U som innehåller alla element som *inte* är element i A. Vi tar en formell definition.

Definition 2.7: Låt U vara ett givet universum och låt A vara en delmängd av U. Med *komplementet* till A menas då den mängd som innehåller alla element i U som inte är innehållna i A. Komplementet till A skrivs A^c. Med klammernotation har vi

$$A^c = \{x \in U : x \notin A\} = \{x \in U : \neg(x \in A)\}.$$

Återigen ser vi att vi baserar oss på en satslogisk operation: Komplementet definieras med hjälp av *negation*. Union, snitt och komplement baseras alltså på disjunktion, konjunktion och negation från satslogiken. Vi kommer att se att många av de lagar som senare ska ta fram är direkta motsvarigheter till de lagar vi sett för logiska konnektiv. Vi kommer också så småningom inse att Venndiagrammen är kan ses som en motsvarighet till sanningstabellerna.

Anmärkning: I definitionen för komplement har vi utökat klammernotationen, det står

$$A^c = \{x \in U : x \notin A\} = \{x \in U : \neg(x \in A)\}.$$

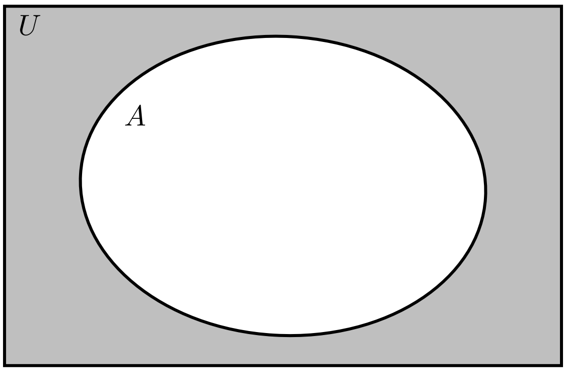
och vi har alltså innan kolonet skrivit $x \in U$ snarare än bara x. Så här kan vi göra när vi vill betona att de objekt vi arbetar med finns i ett viss större mängd som till exempel ett allomfattande universum. Vi har inte gjort samma modifikation av klammernotationen i definitionerna av union och snitt, men vi skulle kunnat göra det. Vi kommer att återkomma till det här i slutet av det här avsnittet.

Exempel: Låt A vara mängden av alla udda heltal $\{\ldots, 5, 3, 1, 1, 3, 5, 7, \ldots\}$ och låt universum U utgöras av alla heltal. Komplementet till A, det vill säga den mängd som vi betecknar med A^c blir då de heltal (element i U) som *inte* är udda. Dessa tal är de jämna talen, så att

$$A^c = \{x \in \mathbb{Z} : x \notin A\} = \{\ldots, 4, 2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}.$$

Exempel: Låt B vara mängden av alla barn och U vara mängden av alla människor. Komplementet till B blir då B^c =mängden av alla människor som inte är barn, det vill säga alla vuxna.

Självklart ska vi nu se på ett Venndiagram som illustrerar komplementet. När vi tar komplementet av en mängd så är ju bara en mängd involverad. Det innebär att Venndiagrammet endast kommer att ha en mängd i sig. De element som ingår i komplementet ligger emellertid *inte* i den aktuella mängden och det innebär att det område som kommer att gråfärgas är området *utanför* den aktuella mängden. Det ser ut så här:



Vi ger nu några avslutande kommentarer beträffande hur komplementet relaterar till tomma mängden. Men dessa kommentarer kommer också att involvera motsatsen till tomma mängden och motsatsen till tomma mängden är förstås universum, U. Skillnaden i de formella definitionerna av union och snitt jämförda med definitionen av komplement var att de inkluderade inte en referens till universum U, men vi skulle kunna ha inkluderat en referens till universum i deras definitioner också. Om vi hade gjort det så hade vi haft följande tre definitioner:

1. $A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$. Baseras på *disjunktion.*
2. $A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$. Baseras på *konjunktion.*
3. $A^c = \{x \in U : \neg(x \in A)\}$. Baseras på *negation.*

Vi kommer från och med nu att anta att det är så här vi gjorde definitionerna. Anledningen till det är att med det här perspektivet, att vi alltid befinner oss inom ett universum, så finns en i vissa avseenden *exakt* överenstämmelse mellan strukturen på satslogiken och mängdläran.

Nu kan vi diskutera komplementets roll i relation till både tomma mängden $\emptyset$ och universum U.

Följande slående mönster kan upptäckas om vi studerar definitionerna (A är en godtycklig mängd och x är ett godtyckligt tal):

Mängdidentitet	Satslogiska och/eller aritmetiska motsvarigheter
$(A^c)^c = A$.	Lagen om dubbel negation, $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$ och två minus tar ut varandra: $-(-x) = x$.
$A \cap U = U \cap A = A$	Multiplikation med 1, alltså $1 \cdot x = x$ och om q är sann så gäller $p \wedge q \leftrightarrow p$.
$A \cup U = U \cup A = U$	Multiplikation med 0, alltså $0 \cdot x = 0$ och om q är falsk så gäller $p \vee q \leftrightarrow p$.
$\emptyset^c = U$	Negationen av en falsk utsaga blir en sann utsaga
$U^c = \emptyset$	Negationen av en sann utsaga blir en falsk utsaga

Vi ska återkomma till den här typen av identiteter i avsnittet om mängdlagar längre fram.

Övningar saknas.

6. Mängddifferens

En speciell operation införs för att subtrahera en mängd från en annan.

Definition 2.8: Låt A och B vara två givna mängder. Med *mängddifferensen*, $A - B$, menas då den mängd som innehåller de element som finns i A men som inte ingår i B. Med klammernotation får vi $A - B = \{x \in U : x \in A \wedge x \notin B\}$.

Om vi tolkar vad som står i definitionen ser vi att $A - B$ är alla element som finns i A, men där vi har tagit bort de element som finns i B från mängden A. Vi skulle kunna skriva om det så här:

$$A - B = \{x \in U : x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap B^c.$$

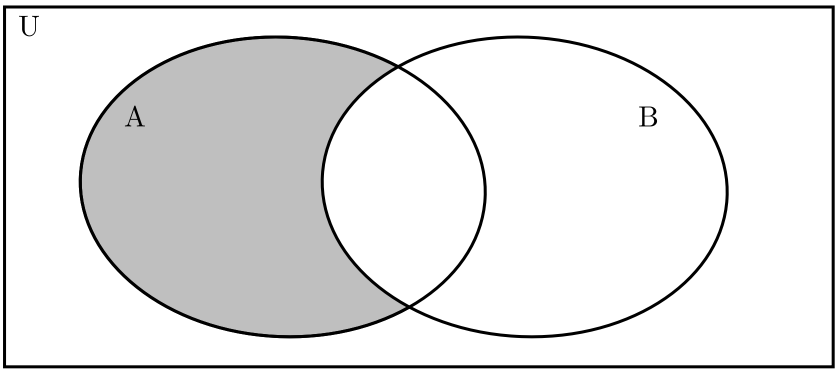
Det vill säga $A - B = A \cap B^c$ är en formel för mängddifferensen. Vi ser på ett par exempel.

Exempel: Låt $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Mängden $A - B$ blir då $\{1, 2\}$ eftersom de andra elementen i A, talen 3, 4, 5, 6 finns i B och de tas bort från A då vi bildar $A - B$.

Exempel: Mängden av alla heltal betecknas som förut nämnt med $\mathbb{Z}$. Låt vidare J vara mängden av alla jämna tal. Mängden $\mathbb{Z} - J$ blir då alla heltal som inte är jämna, det vill säga $\mathbb{Z} - J$ blir mängden av alla udda tal.

Exempel: Låt A vara vilken mängd som helst. Mängden $A - \emptyset$ blir då mängden A själv. Detta eftersom vi väljer att från A ta bort de element som ingår i $\emptyset$. Eftersom $\emptyset$ inte innehåller några element tar vi således inte bort någonting och mängden $A - \emptyset$ kan inte skilja sig alls från mängden A. Alltså blir $A - \emptyset = A$. Detta visar återigen att $\emptyset$ är likt talet 0. (Vi kan också använda formeln ovan och skriva $A - \emptyset = A \cap \emptyset^c = A \cap U = A$.)

Vi illustrerar nu differensen mellan två mängder, $A - B$, i ett Venndiagram i nedanstående figur.



En sista kommentar om mängddifferensen och det är att komplementet A^c till en mängd kan skrivas som en mängddifferens, nämligen

$$A^c = U \cap A^c = U - A.$$

Vi har nu samlat på oss en massa olika samband och egenskaper hos mängdoperationerna så det passar bra att gå till nästa avsnitt där vi ägnar oss helt åt att skapa en del systematik och överblick av det vi stött på hittills.

Övningar saknas

7. Mängdlagar

Vi har sett att precis som att det finns lagar för utsagor finns det lagar för mängder. Eftersom mängdlärans definitioner också är så tätt sammanspunna med logikens definitioner kommer mängdlärans lagar att vara väldigt liknande logikens. Vi har sett tecken på detta i de föregående avsnitten och nu ska vi börja visa mer av det här på ett noggrannt sätt.

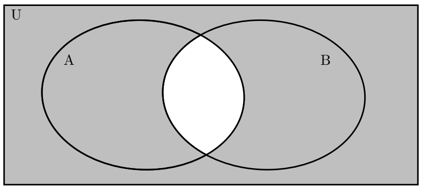
Det är normalt så att för varje lag för utsagor finns en motsvarande lag som gäller för mängder. Till exempel minns vi från kapitel 1 att DeMorgans lag gäller för utsagor: $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$. Om vi studerar Venndiagram med två mängder A och B kan vi faktiskt visa att precis samma sak gäller mängder. Skillnaden blir bara att negation av utsagor ($\neg$) byts mot mängdkomplement (A^c och liknande) och disjunktion mellan utsagor ($\vee$) byts mot union av mängder ($\cup$) och konjunktion av utsagor ($\wedge$) byts mot snitt mellan mängder ($\cap$) och ekvivalens mellan utsagor ($\Leftrightarrow$) byts till identitet mellan mängder ($=$). Vi har alltså DeMorgans lagar även för mängder:

Sats 2.1: *(DeMorgans lagar)* För alla mängder A och B gäller: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ och $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Innan vi studerar beviset av den här lagen behöver vi veta vad som egentligen utgör ett bevis. Att rita upp Venndiagram kan tyckas som ett bra sätt att övertyga sig om att någonting gäller, men tyvärr kan vi inte acceptera det som ett fullfjädrat matematiskt bevis som nämndes tidigare. Så vi kommer att motivera DeMorgans lagar (eller i alla fall en av dem) på två nivåer, först genom att ge Venndiagram och sedan genom att ge ett formellt riktigt matematiskt bevis. Vi kommer att inrikta oss på den ena av lagarna ($(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$) och lämna motsvarande behandling av den andra lagen som en övning. Dessutom kommer många av bevisen av många av lagarna att också lämnas som övningar.

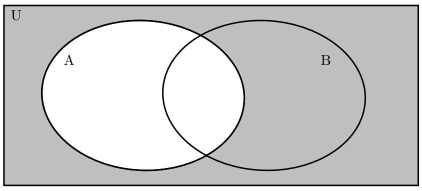
Motivering med Venndiagram: Vi studerar vänster och höger led av likheten $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ med Venndiagram. Vi ska alltså göra ett Venndiagram för $(A \cap B)^c$ som vi kommer att kalla D_{VL} och ett Venndiagram för $A^c \cup B^c$ som vi kommer att kalla D_{HL}. Dessa Venndiagram kommer att bli lika och det kommer att motivera satsen.

Vi börjar med att konstruera D_{VL}. Komplementet till $A \cap B$ illustreras av följande Venndiagram:

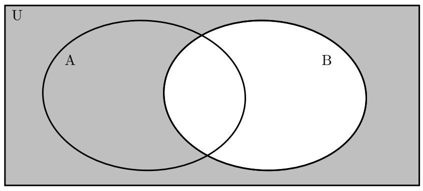


Detta är D_{VL}. Allt som är gråfärgat utgör alltså $(A \cap B)^c$. Vi bildar nu D_{HL} genom att kombinera Venndiagrammen för A^c och B^c enligt operationen union. Vi tar upp Venndiagrammen för A^c och B^c:

A^c:

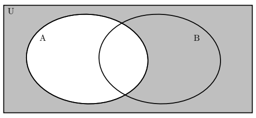


B^c:

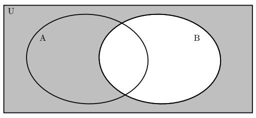


Vi kombinerar nu dessa två Venndiagram i en union och får D_{HL}:

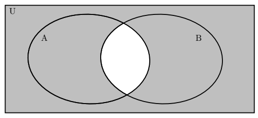
$A^c \cup B^c$ $=$



$\cup$



$=$



Om vi inspekterar Venndiagrammen för D_{HL} och D_{VL} ser vi att de är identiska vilket motiverar satsen.

Som nämnt ovan behöver vi också ge ett formellt matematiskt bevis. Vi formulerar det så här:

Bevis: Vi ska visa att två mängder är lika, det vill säga mängderna $(A \cap B)^c$ och $A^c \cup B^c$. Två mängder är lika om och endast om följande ekvivalens gäller för alla element $x \in U$: $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$. Vi studerar därför $x \in (A \cap B)^c$.

$$x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow \neg(x \in (A \cap B)) \Leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B).$$

Här har vi bara använt definitionen av snitt och komplement. Men här har vi då en satslogisk negation av en konjunktion. Vi kan självklart använda den satslogik som vi redan tagit fram och där finns DeMorgans lag för utsagor och utsagan $\neg(x \in A \wedge x \in B)$ är därför ekvivalent med $\neg x \in A \vee \neg x \in B$ som i sin tur är ekvivalent med

$$x \in A^c \vee x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$$

och sammantaget har vi alltså visat att $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$, vilket innebär att mängderna $(A \cap B)^c$ och $A^c \cup B^c$ måste vara lika. Beviset är klart.

Vi ger nu en lista på lagar som gäller för mängder. Listan har i princip samma innehåll som en motsvarande lista för satslogik som involverar utsagor och konnektiv. I den här listan får vi i stället mängder och mängdoperationer.

Sats: *Mängdlagar* För alla mängder A, B och C gäller följande:

1. Kommutativa lagarna: $A \cap B = B \cap A$ och $A \cup B = B \cup A$.
2. Associativa lagarna: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ och $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
3. Distributiva lagarna: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ och $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
4. Lagen om dubbla komplementet: $(A^c)^c = A$.
5. Idempotens: $A \cap A = A$ och $A \cup A = A$.
6. DeMorgans lagar: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ och $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
7. Absorptionslagarna: $A \cup (A \cap B) = A$ och $A \cap (A \cup B) = A$.

Vi lämnar bevisen av dessa lagar som övningar.

Vi formulerar även ett par lagar som involverar tomma mängden, $\emptyset$, och universum U.

Sats: För alla mängder A i ett universum U gäller:

1. Union med tomma mängden: $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$.
2. Snitt och union med komplementet: $A \cap A^c = \emptyset$ och $A \cup A^c = U$.
3. Komplement av U och $\emptyset$: $U^c = \emptyset$ och $\emptyset^c = U$.

Vi lämnar bevisen av dessa lagar som övningar.

Anmärkning: Att $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ betyder att vi kan kasta parenteserna och skriva $A \cap B \cap C$. Detta är helt i analogi med vanliga tal, vi kan ju till exempel skriva $2 \cdot 3 \cdot 4$ och uppfatta det som väldefinierat. För att beskriva den här egenskapen säger vi att snitt och multiplikation är *associativa*. Union och addition är också associativa det vill säga på samma sätt blir uttrycken $A \cup B \cup C$ och $2 + 3 + 4$ väldefinierade eftersom parenteserna inte behövs – de kan sättas var som helst så kan vi lika gärna ta bort dem.

Övningar

2.7.1 *före detta 2.9.1.* Visa följande lagar med Venndiagram:

1. Associativa lagen för union: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
2. Distributiva lagarna: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ samt $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
3. Lagen om dubbla komplementet: $(A^c)^c = A$.
5. Idempotens: $A \cap A = A$ samt $A \cup A = A$.
6. DeMorgans lagar: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ samt $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
7. Absorptionslagarna: $A \cup (A \cap B) = A$ samt $A \cap (A \cup B) = A$.

2.7.2 *före detta 2.9.2.* Studera med Venndiagram följande två lagar:

$$A \subset B \wedge B \cap C = \emptyset \Rightarrow A \cap C = \emptyset \quad \text{och} \quad C \subset A \cup B \wedge A \cap B \cap C = \emptyset \Rightarrow C \cap A = \emptyset \vee C \cap B = \emptyset.$$

En av dem gäller, en av dem gäller inte. Vilken gäller och vilken gäller inte? Motivera med Venndiagram. För den lagen som inte gäller, exemplifiera med tre mängder A, B och C som inte uppfyller lagen.

2.7.3 *före detta 2.9.3.* Låt A, B och C vara godtyckliga mängder. För varje påstående, avgör om det är sant eller falskt. Om det är sant, visa det genom att rita ett Venndiagram för höger och vänster led. Om det är falskt ge ett motexempel genom att ange mängder A, B och eventuellt C för vilka påståendet inte gäller.

(a) $(A - B)^c = (B - A)^c$.
(b) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.

(Från tentamen i diskret matematik den 11 januari 2001.)

2.7.4 *före detta 2.9.4.* Ange med mngdsymboler (A, B, C, union-, snitt- och mängddifferenstecken) vilka mängder är som är symboliserade i nedanstående Venndiagram:

Diagram 1.

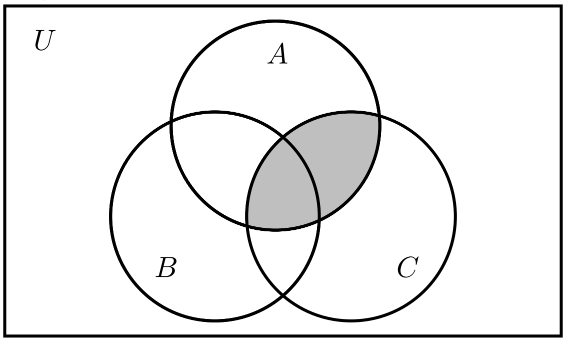


Diagram 2.

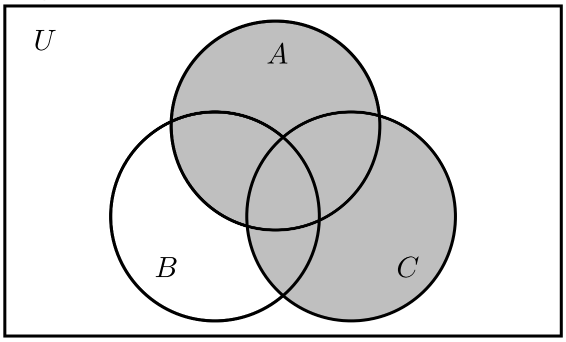


Diagram 3.

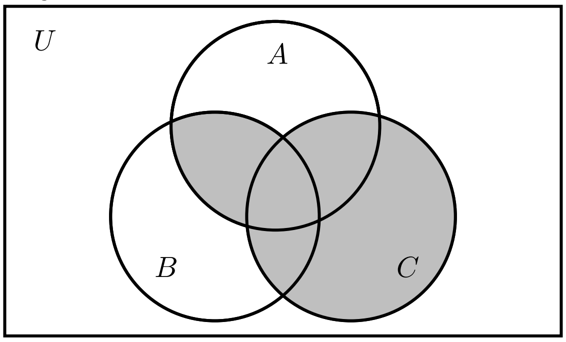


Diagram 4.

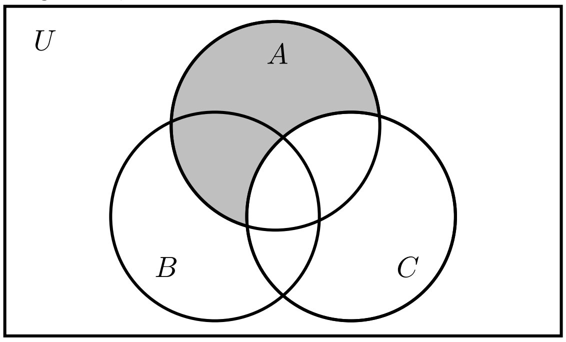


Diagram 5.

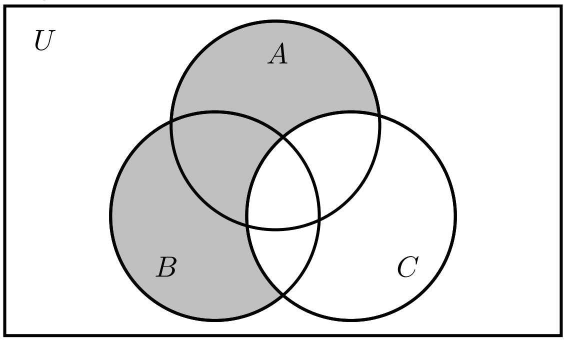


Diagram 6.

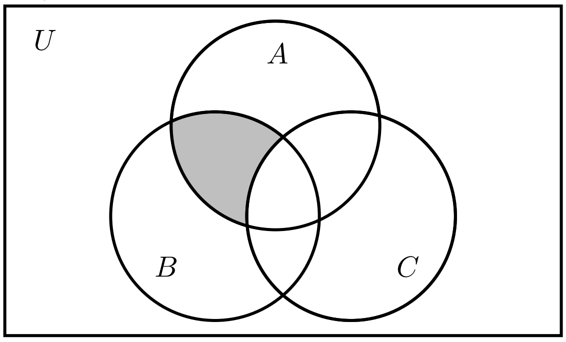


Diagram 7.

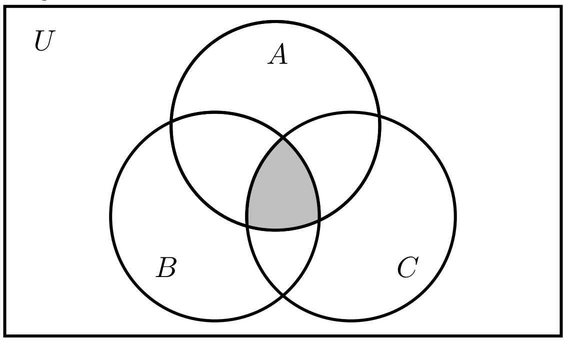
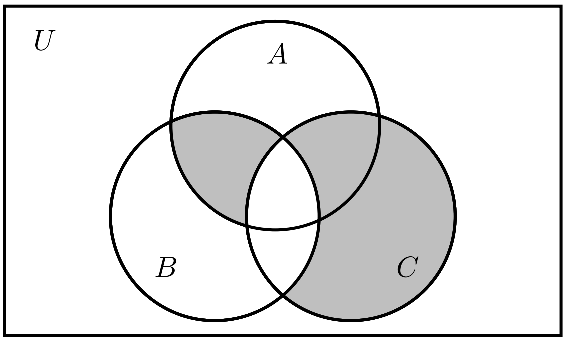


Diagram 8.



8. Kryssprodukter

Ibland behöver vi bilda ordnade par av element från två mängder, som till exempel koordinater av punkter i talplanet $\mathbb{R}^2$. Vi får då element som $(1,2), (3,4)$ och liknande. Det kan förstås göras för andra mängder än mängder av tal. Vi tar en definition.

Definition: Låt A och B vara två mängder. Med *kryssprodukten* av A och B menas då mängden av alla ordnade par av element från A och B där det första elementet i paren tas från A och det andra tas från B. Vi skriver kryssprodukten med $A \times B$ och vi har alltså $A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$.

Exempel: Låt mängderna $A = \{1,2,3\}$ och $B = \{3,4\}$ vara givna. Då blir

$$A \times B = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4)\}.$$

Observera att paren är *ordnade* så paret $(3,4)$ ingår i $A \times B$, men paret $(4,3)$ ingår *inte*.

Exempel: Kryssprodukten mellan alla reella tal och alla reella tal, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ som brukar betecknas med $\mathbb{R}^2$ bildar mängden av alla par av reella tal som vi känner som mängden av alla punkter som brukar åskådliggöras som det reella talplanet.

Man kan bilda kryssprodukter mellan flera mängder. Vi tar en definition.

Definition: Låt A, B och C vara givna mängder. Med kryssprodukten mellan A, B och C menas då mängden av alla ordnade *tripplar* av element från A, B och C där det första elementet väljs från A, det andra från B och det tredje från C. Vi skriver denna kryssprodukt på följande sätt: $A \times B \times C$ och vi har alltså $A \times B \times C = \{(a,b,c) : a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}$.

Exempel: Vi bildar kryssprodukten mellan $A = \{0,1\}$, $B = \{1,2\}$ och $C = \{2,3\}$. Vi får då

$$A \times B \times C = \{(0,1,2),(0,1,3),(0,2,2),(0,2,3),(1,1,2),(1,1,3),(1,2,2),(1,2,3)\}.$$

Exempel: Om vi bildar $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, där $\mathbb{R}$ som förut är mängden av reella tal får vi liksom i förra exemplet en mängd som vi känner igen från linjära algebran: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ är Euklidiska rummet av punkter i tre dimensioner, alltså $\mathbb{R}^3$.

På samma sätt som ovan kan vi införa kryssprodukter av fler mängder än 3. Således blir $A \times B \times C \times D$ lika med mängder av alla ordnade fyrtipplar av element från mängderna A, B, C och D. I fyrtipplarna $A \times B \times C \times D$ i ska förstås det första elementet väljas från A, det andra från B, det tredje från C och det fjärde från D.

(Observera att kryssprodukten faktiskt inte är en associativ operation.)

Övning

2.8.1 *före detta 2.10.1.* Låt mängderna

$$A = \{1,2,3,4\}, \quad B = \{10,20\} \quad \text{och} \quad C = \{100,200,300\}$$

vara givna. Ange följande tre mängder genom att räkna upp deras element:

$$A \times B, \quad A \times C, \quad (A \times B) \times C, \quad A \times (B \times C), \quad A \times B \times C.$$

Gäller $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$? Varför? Varför inte?

9. Antal element i en mängd

Vi inför ett skrivsätt för antal element i en mängd.

Definition 2.11: Låt A vara en godtycklig mängd. Med beteckningen $|A|$ menas då antalet element i A. Om A är en mängd med oändligt antal element skriver vi $|A| = \infty$.

Exempel: Låt $A = \{1,2,3,5\}$. Eftersom A har 4 element får vi $|A| = 4$.

Exempel: För mängden $\mathbb{Z}$ = alla heltal gäller $|\mathbb{Z}| = \infty$ eftersom $\mathbb{Z}$ har oändligt många element. (Det finns ju oändligt många heltal.)

Exempel: Antalet element i tomma mängden är 0 och de är den enda mängden som har 0 element. Alltså vet vi att $|A| = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$.

Exempel: Låt mängderna $A = \{1,2,3\}$ och $B = \{3,4\}$ vara givna. Då blir

$$A \times B = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\}$$

som vi sett ovan. Vi har att $|A| = 3$, $|B| = 2$ och $|A \times B| = 6$. Vi observerar att $6 = 3 \cdot 2$ och alltså gäller

$$|A \times B| = 6 = 3 \cdot 2 = |A| \cdot |B|.$$

Detta är förstås ingen tillfällighet. För alla kryssprodukter gäller $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Övning

2.9.1 *före detta 2.11.1.* Låt mängderna A, B och C vara givna som i uppgift 2.8.1. Ange

$$|A \times B|, \quad |A \times C|, \quad |(A \times B) \times C| \quad \text{och} \quad |A \times B \times C|.$$

10. Mängder av mängder och potensmängden

Vi har nu infört mängdbegreppet och har symbolen $\in$ som används för att beteckna inklusion i mängder av enskilda element, alltså $1 \in \{1,2,3\}$ respektive $5 \notin \{1,2,3\}$ och liknande. Vidare har vi också symbolen $\subset$ (och ibland $\subseteq$) som betecknar inklusion av mängder i mängder, så kallade *delmängder*, så att vi kan skriva $\{1,2\} \subset \{1,2,3\}$ och så vidare.

I det här avsnittet ska vi gå ett steg längre och betrakta mängder av *mängder*, det vill säga vi ska studera situationen där elementen själva i en mängd också är mängder. Det skulle kunna se ut så här:

$$M = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}.$$

Här har vi bildat en mängd som vi kallar M. Mängden M har tre element och dessa tre element är mängderna

$$\{1,2\}, \quad \{2,3\}, \quad \text{och} \quad \{1,2,3\}.$$

Eftersom elementen i M är mängder så kan vi skriva

$$\{1,2\} \in M, \quad \{2,3\} \in M, \quad \text{och} \quad \{1,2,3\} \in M.$$

Och det här är alltså tre sanna utsagor. Observera då att utsagorna

$$\{1,2\} \subset M, \quad \{2,3\} \subset M, \quad \text{och} \quad \{1,2,3\} \subset M$$

är *falska* eftersom M inte innehåller talen 1, 2 eller 3. Det här med ”mängder av mängder” är egentligen inte så komplicerat, vi måste bara se till att vi använder rätt symbol, $\in$ eller $\subset$, så att det vi skriver inte blir fel.

Då det gäller tomma mängden, $\emptyset$, så är den en delmängd av varje mängd, men den är inte ett *element* i varje mängd. Som vi betonat tidigare har vi alltså alltid $\emptyset \subset M$ men alltså inte alls säkert $\emptyset \in M$. Om vi ska ha tomma mängden som ett element i en mängd så måste det konstrueras på det sättet, vi kan till exempel skriva

$$E = \{\emptyset,\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\} \qquad (= \{\emptyset\} \cup M)$$

och nu har vi verkligen $\emptyset \in E$ (och förstås också $\emptyset \subset E$).

Betrakta nu mängden $F = \{1,2,3\}$. Vilka är dess delmängder? Vilka är de mängder alltså uppfyller $D \subset F$? Vi vill hitta alla möjliga D. (Vi väljer D för att det ska vara en delmängd.)
Ja, $\emptyset$ är förstås en av delmängderna och även F själv så både $\emptyset$ och F själv fungerar som D. Vi kan skapa en lista på möjliga delmängder och har alltså hittills:

$$\emptyset \quad \text{och} \quad F.$$

Men det finns förstås flera. Vi kan studera de enskilda elementen i F och inse att varje element kan förekomma i en delmängd av F eller inte, det finns två möjligheter för varje element, så 1 kan vara med, eller inte, 2 kan vara med eller inte och 3 kan vara med eller inte. Det blir total 8 möjligheter. Vi har redan täckt två av dessa möljligheter, nämligen då inga är med (det var $\emptyset$) respektive då alla var med (det var F själv). Vi leds av dessa observerationer och kan nu skriva upp en lista på alla delmängder till F:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\} \text{ och } F.$$

och det är alltså 8 möjliga delmängder som finns i F.

Den här konstruktionen, att finna alla delmängder till en given mängd, är användbar i matematisk teoribyggnad. Vi utgår alltså från en given mängd och vill ta fram alla delmängder till denna givna mängd. För att samla alla delmängder samlas dessa i en speciell mängd som vi benämner *potensmängden*. Vi gör en formell definition:

Definition: Låt E vara en given mängd. Med *potensmängden* av E menas då mängden av alla möjliga delmängder till E. Vi betecknar potensmängden med $\mathcal{P}(E)$.

Exempel: Ovan tog vi fram alla möljliga delmängder till $\{1,2,3\}$ och dessa var

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\} \text{ och } \{1,2,3\}.$$

Alltså gäller

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Exempel: Betrakta tomma mängden och en mängd som bara har ett element, låt oss säga $\{1\}$.

Vad blir $(P)(\emptyset)$? Ja, det finns bara en delmängd av $\emptyset$ och det är $\emptyset$ själv, så $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Detta är alltså inte tomma mängden, det är *mängden av tomma mängden.*

Ju fler element en mängd har desto fler möjligheter finns det att bilda delmängder och $\{1\}$ har två möjliga delmängder, nämligen $\emptyset$ och $\{1\}$ själv så vi drar slutsatsen att $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$. Det finns alltså två element i potensmängden av $\{1\}$. Ovan såg vi att potensmängden av $\{1, 2, 3\}$ innehöll hela 8 element – alltså 8 mängder – och det illustrerar förstås att ju fler element en mängd har desto flera möjligheter finns det att bilda delmängder.

Övningar saknas.

11. Disjunkta mängder och partitioneringar

För att införa mer tydlighet kring vilka mängder som ingår i vilka brukar man ibland införa ordet *klasser* när man talar om de mängder som ligger i en mängd. Ordet ”klass” är också en synonym till ordet ”mängd” men brukar användas när en större mängd ska delas in i klasser, alltså när vi ska skapa en *klassifikation.* Det här någonting som vi känner till från dagligt tal vi kan till exempel tala om att en årskurs av elever i en skola delas in i klasser, kanske mängden av elever i årskurs 4 delas in i klasserna 4A, 4B och 4C. En annan mer samhällsorienterad användning av ordet ”klass” kan vara att vi talar om ”överklassen” (alltså rikt folk), ”medelklassen” (folk som varken är rika eller fattiga), eller ”underklassen” (fattiga).

När vi nu försöker skapa ordning och reda är det ibland bra att kräva att klasser inte har några gemensamma element, alltså element som tillhör två olika klasser samtidigt. Vi inför den egenskapen generellt för mängder:

Definition 2.8: Låt A och B vara två givna mängder. Då sägs A och B vara *disjunkta* om och endast om de inte innehåller några gemensamma element. (Det har ingenting med *disjunktion* att göra.)

Från definitionen följer att två mängder är A och B är disjunkta om och endast om snittet mellan dem är tomma mängden. Vi inser alltså att

$$A \text{ och } B \text{ är disjunkta } \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

Exempel: Mängden av alla positiva heltal $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ och mängden av alla negativa heltal $B = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$ är två mängder som inte har några gemensamma element. Alltså gäller att $A \cap B = \emptyset$ och de är alltså disjunkta.

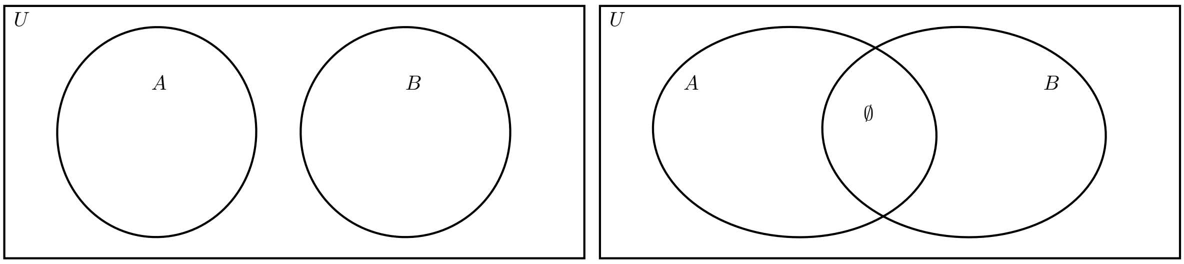
Tyvärr är terminologin inte så bra. Att två mängder är *disjunkta* är ju någonting som karakteriseras av en jämförelse av mängderna *med varandra.* Det vore då bättre att säga att mängderna är *disjunkta från varandra* men terminologin är ganska etablerad. När vi talar om disjunkta mängder måste vi anta att det finns ett sammanhang som kan användas för att förklara vilka mängder som saknar gemensamma element.

Exempel: Mängden av alla jämna heltal $A = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$ och mängden av alla udda tal $B = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots\}$ har inga gemensamma element. Alltså är dessa mängder disjunkta och vi kan även här konstatera att $A \cap B = \emptyset$.

Exempel: Mängderna $A = \{1, 3, 5\}$ och $B = \{2, 3, 4\}$ har elementet 3 gemensamt. Således är de mängderna inte disjunkta och vi har $A \cap B = \{3\} \neq \emptyset$.

Exempel: Tomma mängden är disjunkt med varje annan mängd. Eftersom tomma mängden inte innehåller några element alls kan den heller inte ha några element gemensamt med någon annan mängd. Vi har således $A \cap \emptyset = \emptyset$ för varje mängd A. (Tomma mängden är till och med, i någon artificiell mening ”disjunkt från sig själv”.)

Med Venndiagram kan vi illustrera att två mängder är disjunkta på två sätt. Till vänster i nedanstående figur har vi illustrerat att mängderna A och B är disjunkta genom att lägga representationerna av mängderna helt enkelt ett stycke från varandra i själva diagrammet. I samma figur till höger har vi illustrerat att mängderna är disjunkta genom att lägga in symbolen för tomma mängden i det fält som representerar de gemensamma elementen för A och B, det vill säga $A \cap B$.



Figuren skulle alltså kunna illustrera något av de ovanstående exemplen, till exempel skulle A kunna stå för de jämna talen och B skulle kunna stå för de udda talen.

Vi ska nu återvända till det här med klasser. Som nämnt ovan säger vi ”klasser” när vi vill skapa klassificeringar. Och klassificeringar används för att beskriva något slags struktur, vi beskriver till exempel maänniskorna i samhället som tillhörandes ”överklassen” eller ”medelklassen” eller ”underklassen”.
Vi vill ofta att klasser ska vara disjunkta och när vi använder klasser för att beskriva en mängd så vill vi också att unionen av alla klasserna ska vara hela mängden. Det ligger till grund för begreppet *partitionering* som vi definierar så här:

Definition: Låt en icke-tom mängd M vara given. Med en *partionering* Π av M menas då en mängd av delmängder av M med följande egenskaper:

(1) Inga element i Π får vara tomma mängden.
(2) Om $E \in \Pi$ och $F \in \Pi$ är två olika element av Π så gäller $E \cap F = \emptyset$. Detta kallas att elementen i Π är *parvis disjunkta*.
(3) Unionen av alla element i Π utgör hela M.

Vi kallar ibland elementen i Π för *klasser* för att också betona att de är mängder.

Vi studerar nu några exempel på partitioneringar som vi redan sett fast vi visste inte då vad ordet ”partitionering” betydde.

Exempel: Ovan såg vi heltalen $\mathbb{Z}$ delas upp i udda och jämna tal, om U betecknar mängden av udda tal och J betecknar mängden av jämna tal så utgör $\Pi = \{U, J\}$ en partitionering av $\mathbb{Z}$. Heltalen ($\mathbb{Z}$) delas då upp två klasser av tal, de jämna (J) och de udda (U).

Exempel: Om vi har två disjunkta icketomma mängder, vilka som helst, A och B så utgör $\Pi = \{A, B\}$ en partitionering av $A \cup B$.

Och vi kan förstås hitta på andra partitioneringar som till exempel om $M = \{1, 2, 3\}$ så utgör $\Pi = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ en partitionering av M där alla klasser i Π består av precis ett element.

En partionering Π av en mängd M är förstås en delmängd av potensmängden av M, det vill säga vi har alltid $\Pi \subset \mathcal{P}(M)$.

Övningar saknas.

12. Predikat och kvantorer

I detta avsnitt ska vi koppla ihop mängdläran och logiken. Vi börjar med att införa variabler i utsagor.

Definition 2.12: Ett *predikat* är en mening som innehåller variabler och predikatet ska *bli* en utsaga då variablerna tilldelas konkreta värden. Med *domänen* av ett predikat menas mängden av tillåtna värden på de ingående variablerna.

Exempel: Meningen $p(x) =$ ”x har fyra ben” är ett predikat som blir olika utsagor beroende på vad vi sätter in för värde på variabeln x. Vi får olika sanningsvärden beroende på vilka olika värden som x antar. Exempelvis är p(Hästen Brunte) sann medan p(Papegojan Polly) är falsk. Domänen av predikatet $p(x)$ kanske kan anses vara mängden av alla djur. (Vi kan ha större domäner också, det här är bara ett exempel.)

Exempel: Meningen $q(x)$ som definieras av den matematiska texten $x^2 - 3x + 2 = 0$ är ett predikat som blir olika utsagor beroende på vad vi sätter in för värde på variabeln x. Vi känner igen detta som en så kallad

”ekvation” och ekvationer kan tolkas som predikat. Eftersom själva ekvationen innehåller ett likhetstecken är det bättre att specificera predikatet med ett ekvivalenstecken så att vi inför predikatet genom att skriva

$$q(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Vi sätter in lite olika värden på x, exempelvis är $q(0) \Leftrightarrow 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 0 \Leftrightarrow -1 = 0$. Matematiskt vet vi att denna utsaga är falsk ty vänster led i likheten är -1 medan höger led är 0. Vi kan lösa andragradekvationer och vi vet därifrån att $q(1)$ och $q(2)$ är sanna medan $q(x)$ blir falsk för alla andra värden på x. (Däribland värdet 0 som vi just såg.) Domänen för detta predikat skulle kunna vara de reella talen - $\mathbb{R}$. (Eller till och med de komplexa talen - $\mathbb{C}$, men vi berör inte komplexa tal i denna framställning.)

Ett predikat har alltså inte sanningsvärde på egen hand. För att få utsagor från ett predikat har vi hittills behövt peka ut konkreta värden på predikatets variabler. Det finns emellertid ett mycket användbart och kraftfullt notationssätt som tillåter oss att formera utsagor av predikat utan att specificera konkreta värden på variablerna och det är med så kallade *kvantorer*.

Studera andra exemplet ovan. Vi vet att det finns ett värde på x som gör meningen $q(x)$ sann. (Det finns egentligen två värden, nämligen 1 och 2 som är de två lösningarna till andragradsekvationen, men vi nöjer oss med att säga att det finns ett.) För att uttrycka detta ”det finns ett x sådant att $q(x)$ är sann” skriver vi:

$$\exists x : q(x)$$

och vi utläser det så här: ”Det existerar ett x sådant att $q(x)$ är sann”. Detta *har* ett sanningsvärde. Vi *vet* att det finns ett (ja, till och med två!) värde på x som gör $q(x)$ sann. Alltså kan vi säga att det är sant att det existerar ett x sådant att $q(x)$ blir sann. Alltså är $\exists x : q(x)$ en sann utsaga.

Ibland brukar man poängtera vilken domän man arbetar med i samband med notationen med kvantorer och då skriver vi så här: $\exists x \in \mathbb{R} : q(x)$. Domänen till predikatet $q(x)$ är alla reella tal och utsagan $\exists x \in \mathbb{R} : q(x)$ utläser vi nu ”Det finns ett x bland de reella talen sådant att $q(x)$ är sann.”

Symbolen ”$\exists$” kallas för *existenskvantorn* och vi ska studera ett par exempel med den.

Exempel: Utsagan $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0$ är sann ty det finns ett reellt tal x sådant att $x^2 - 1 = 0$, till exempel duger $x = 1$. (Vi har ju $1^2 - 1 = 0$.)

Exempel: Utsagan $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0$ är falsk ty det finns inget *reellt* tal x sådant att $x^2 + 1 = 0$, för om vi kvadrerar ett reellt, vilket som helst, får vi alltid någonting positivt. Det innebär att uttrycket $x^2 + 1$ alltid är större än 1 och således kan det aldrig bli 0, vilket val av talet x vi än gör bland de reella talen. Utsagan $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0$ är alltså falsk.

Det finns två kvantorer, den ena är existenskvantorn (som vi redan sett.) Den andra är *allkvantorn.* Vi använder allkvantorn då vi vill uttrycka att någonting gäller för alla x (eller mer precist: alla värden på en variabel i en viss domän). Vi skriver så här:

$$\forall x : q(x)$$

och utläser det ”För alla x gäller $q(x)$”. Då får vi en utsaga. På samma sätt som med existenskvantorn kan vi betona vilken den underliggande domänen till det aktuella predikatet är genom att skriva $\forall x \in D : q(x)$. Detta utläses ”För alla x i D är $q(x)$ sann”.

Vi tar ett par exempel:

Exempel: Utsagan $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ är sann ty om vi väljer ett reellt x, vilket som helst, och kvadrerar det så får vi ett positivt tal. Utsagan $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1$ är falsk eftersom det finns reella tal som inte uppfyller $x^2 \geq 1$.

Exempel: Utsagan $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 3 \cdot x + 2 = 0$ är falsk. Visserligen gäller det, som vi vet, att $2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$ och $1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$, det vill säga predikatet innanför allkvantorn blir en sann utsaga för *två* värden på x men det betyder alltså inte att predikatet blir en sann utsaga för *alla* värden på x vilket vi hävdar när vi säger $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 3 \cdot x + 2 = 0$. Alltså är utsagan $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 3 \cdot x + 2 = 0$ falsk.

Kvantorer kan illustreras genom följande anekdot.

En ingenjör (inte utbildad vid KTH), en fysiker och en matematiker var på resa i Skottland och åkte tåg genom högländerna. På avstånd såg de ett svart får stå och beta gräs varpå ingenjören utbrast: ”Hörni kolla!

Ett svart får! Alla fåren i Skottland är tydligen svarta!" Både fysikern och matematikern blev förskräckta över denna förhastade slutsats och fysikern tog till orda. "Bäste ingenjör! Vi har bara sett ett får som är svart i Skottland. Det innebär *inte* nödvändigtvis att alla får i Skottland är svarta. Vad vi med säkerhet kan säga från denna observation är endast att det existerar ett får i Skottland som är svart."

Matematikern tittade förskräckt på fysikern och tog till orda ... Vad matematikern sade ska vi vänta med. Vi ska analysera ingenjörens och fysikerns utlåtanden.

Om vi låter D vara mängden av alla får i Skottland och $p(x)$ vara predikatet

$$p(x) = \text{"}x \text{ är svart"}$$

så kan ingenjörens utsaga formuleras:

$$\forall x \in D : p(x).$$

Det vill säga "För alla får i Skottland gäller att de är svarta". Detta var givetvis inte säkert, de tre resenärerna hade ju bara observerat ett svart får, som fysikern mycket riktigt anmärkte. Det som fysikern sade låg närmare sanningen. Fysikern sade

$$\exists x \in D : p(x),$$

alltså "bland alla fåren i Skottland existerar det ett får som är svart". (Nämligen det får som de såg.)

Matematikern (som var en överpetnoga viktigpetter) sade: "Men är ni helt från vettet båda två! Fåret står ju i profil! Det enda vi kan säga är att det existerar ett får i Skottland vars ena sida är svart!"

Vi ska studera hur vi negerar utsagor formerade med kvantorer. Hur negerar vi utsagan $\forall x \in D : p(x)$? Vi kan återvända till exemplet med får i Skottland för att inse hur vi ska bilda denna negation. Antag att det finns 1000 får i Skottland (det finns förstås mycket mer, men låt oss bara anta att det är 1000.) Utsagan $\forall x \in D : p(x)$ kan då skrivas

$$p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge \ldots \wedge p(x_{1000}),$$

det vill säga "får x_1 är svart och får x_2 är svart och ... och får x_{1000} är svart." Alla 1000 fåren är svarta. Vad blir motsatsen? Vad måste gälla om detta ska vara en falsk utsaga? Jo, *något* av fåren är inte svart. Det räcker med att *ett enda* får inte är svart för att utsagan "Alla får är svarta" ska vara en lögn, det vill säga vara falsk. Motsatsen blir alltså att

"Det existerar ett får som inte är svart"

och med kvantorer kan vi skriva detta

$$\exists x \in D : \neg p(x).$$

Sammanfattningsvis har vi alltså att negationen av $\forall x \in D : p(x)$ är $\exists x \in D : \neg p(x)$. Vi kan skriva det mer kompakt så här:

$$\neg \forall x \in D : p(x) \Leftrightarrow \exists x \in D : \neg p(x).$$

Vi kan tolka detta som att negationstecknet "multiplicerats in" förbi allkvantorn som då byts mot en existenskvantor.

På samma sätt bildar vi negationer av utsagor formerade med existenskvantorn. Antag att vi vill bilda utsagan "Det finns ett svart får i Skottland". Med kvantorer blir det $\exists x \in D : p(x)$. Om vi nu vill negera detta, det vill säga bilda motsatsen till "Det finns ett svart får i Skottland" då vill vi att det tolkningen ska vara att det *inte finns ett enda* får i Skottland som är svart. För alla får i Skottland ska det alltså gälla att de inte är svarta. Negationen av "Det existerar ett får i Skottland som är svart" blir alltså

"För alla i Skottland får gäller att de inte är svarta."

Med kvantorer får vi

$$\neg \exists x \in D : p(x) \Leftrightarrow \forall x \in D : \neg p(x).$$

Det vill säga existenskvantorn byts mot allkvantorn då vi "flyttar in" (eller "multiplicerar in") negationstecknet.

Vi har faktiskt sett detta förr. Om vi hävdar att $\forall x \in D : p(x)$ så är detta (som nämnt ovan) bara ett kortare skrivsätt för konjunktionen

$$p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge \ldots \wedge p(x_{1000}),$$

alltså en vanlig konjunktion av 1000 utsagor. (Om vi nu håller oss till de 1000 fåren i Skottland.) Utsagan $\exists x \in D : \neg p(x)$ kan då tolkas som en disjunktion:

$$\exists x \in D : p(x) \Leftrightarrow \neg p(x_1) \vee \neg p(x_2) \vee \ldots \vee \neg p(x_{1000}).$$

Om vi skriver om de två reglerna för negation av utsagor formerade med kvantorer ovan med dessa tolkningar får vi alltså:

$$\neg\forall x \in D : p(x) \Leftrightarrow \exists x \in D : \neg p(x)$$

som då skrivs om till

$$\neg(p(x_1) \land p(x_2) \land \ldots \land p(x_{1000})) \Leftrightarrow \neg p(x_1) \lor \neg p(x_2) \lor \ldots \lor \neg p(x_{1000}).$$

Om vi hade haft bara *två* får hade det sett ut så här:

$$\neg(p(x_1) \land p(x_2)) \Leftrightarrow \neg p(x_1) \lor \neg p(x_2).$$

Men det här är bara *DeMorgans Lag*! ($\neg(p \land q) \Leftrightarrow \neg p \lor \neg q$) Vi kan alltså uppfatta omskrivningen

$$\neg\forall x \in D : p(x) \Leftrightarrow \exists x \in D : \neg p(x)$$

som en utvidgad variant av *DeMorgans Lag*.

Exempel: Formulera följande påståenden med hjälp av kvantorer och bilda sedan deras motsatser och uttryck dem med kvantorer. Formulera också motsatsen med vanligt språk. (De tre första exemplen är väsentligen desamma.)

1. ”Alla matematiker bär glasögon”

   Lösning: Sätt $D =$ mängden av alla matematiker. Om $p(x)$ är predikatet ”x bär glasögon” kan ”Alla matematiker bär glasögon” skrivas
   $$\forall x \in D : p(x).$$
   Negationen blir $\neg\forall x \in D : p(x) \Leftrightarrow \exists x \in D : \neg p(x)$ som utläses ”Det existerar ett x bland alla matematiker som inte bär glasögon” eller kortare ”Det finns en matematiker som inte bär glasögon”.

2. ”Alla fåren i Skottland är svarta”

   Lösning: Sätt, som förut, $D =$ mängden av alla får i Skottland. Om $p(x)$ är predikatet ”x är svart” kan ”Alla fåren i Skottland är svarta” skrivas $\forall x \in D : p(x)$. Negationen blir $\neg\forall x \in D : p(x) \Leftrightarrow \exists x \in D : \neg p(x)$ som utläses ”Det existerar ett x bland alla fåren i Skottland som inte är svart” eller kortare ”Det finns ett får i Skottland som inte är svart”.

3. ”Alla matematiker är överpetnoga viktigpettrar”

   Lösning: Sätt $D =$ mängden av alla matematiker. Om $p(x)$ är predikatet ”x är en överpetnoga viktigpetter” så kan ”Alla matematiker är överpetnoga viktigpettrar” formuleras $\forall x \in D : p(x)$. Negationen blir $\neg\forall x \in D : p(x) \Leftrightarrow \exists x \in D : \neg p(x)$ som utläses ”Det existerar ett x bland alla matematiker som inte är en överpetnoga viktigpetter”. Kortare: ”det finns en matematiker som inte är en överpetnoga viktigpetter”.

4. ”Inget får i Skottland är inte svart.”

   Lösning: Sätt, som förut, $D =$ mängden av alla får i Skottland och låt $p(x)$ vara predikatet ”x är inte svart”. Meningen ”Inget får i Skottland är inte svart” kan då formuleras ”Det existerar inget får i Skottland som är inte är svart”. Det kan vi skriva som
   $$\neg\exists x \in D : \neg p(x).$$
   Att negera denna utsaga är lätt eftersom den inleds med ett negationstecken. Vi får $\neg(\neg\exists x \in D : \neg p(x)) \Leftrightarrow \exists x \in D : \neg p(x)$ som utläses ”Det finns ett får i Skottland som inte är svart.”

5. ”Det finns ett svart får i Skottland”

   Lösning: Sätt, som förut, $D =$ mängden av alla får i Skottland. Om $p(x)$ är predikatet ”x är svart” kan ”Det finns ett svart får i Skottland” formuleras $\exists x \in D : p(x)$. Negationen blir
   $$\neg\exists x \in D : p(x) \Leftrightarrow \forall x \in D : \neg p(x)$$
   vilket kan formuleras ”För alla får i Skottland gäller att de inte är svarta”.

Övningar

2.12.1. Låt mängderna $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ och $C = \{1, 2, 4, 8\}$ vara givna. Ange sanningsvärdet av följande fem utsagor. Ange även varför utsagan är sann eller falsk. Om en utsaga är falsk, ta bort element från mängderna A, B och C så att utsagan blir sann. Då element tas bort från mängderna A, B och C ska det vara så få element som möjligt som tas bort.
Utsaga 1: $\forall x \in B : \exists y \in A : x = 2 \cdot y$.
Utsaga 2: $\forall x \in C : \exists y \in A : x = 2 \cdot y$.
Utsaga 3: $\exists x \in C : \exists y \in A : x = 2 \cdot y$.
Utsaga 4: $\exists x \in C : \forall y \in A : x = 2 \cdot y$.
Utsaga 5: $\forall x \in C : \forall y \in A : x = 2 \cdot y$.

2.12.2. Formulera negationerna till varje utsaga från föregående övningsuppgift.

2.12.3. I linjär algebra kan vi ibland finna att en linje är innesluten i ett plan. Så är till exempel fallet med linjen med parameterframstllningen $t \mapsto (t, -2 \cdot t, t)$ som ligger helt innesluten i planet med ekvationen $x + y + z = 0$. Om vi betecknar rummet av alla punkter med $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ och mängden av alla punkter i planet med M och mängden av alla punkter p linjen med L så gäller följande mängdrelation:

$$L \subset M \subset \mathbb{R}^3.$$

Att en punkt P finns på linjen kan då skrivas så här:

$$P \in L \Leftrightarrow \exists t : P = (t, -2 \cdot t, t).$$

Det vill säga punkten P ligger p linjen L om det finns ett parametervärde t som vid insättning i formeln hörande till parameterframställningen av L ger oss punkten P. Planets parameterframställning ges av

$$P \in M \Leftrightarrow \exists s \exists t : P = (-s - t, s, t).$$

Vilka av utsagor är sanna och vilka är falska?

1. $\forall P \in L : \exists s \exists t : P = (-s - t, s, t)$,
2. $\forall P \in M : \exists t : P = (t, -2 \cdot t, t)$,
3. $\exists P \in M : \exists t : P = (t, -2 \cdot t, t)$,
4. $\exists P \in \mathbb{R}^3 : \exists t : P = (t, -2 \cdot t, t) och \exists P \in \mathbb{R}^3 : \exists s \exists t : P = (-s - t, s, t)$,
5. $\exists P \in M : \forall t : P = (t, -2 \cdot t, t)$,
6. $\exists P \in M : \neg(\forall t : P = (t, -2 \cdot t, t)) och \exists P \in M : \neg(\exists t : P = (t, -2 \cdot t, t))$.

Ge geometriska tolkningar av dessa utsagor och förklara varför de är sanna eller falska.

13. Booleska algebror

Mängdlära och satslogik har många gemensamma egenskaper. Exempelvis gäller DeMorgans Lagar både för mängder och utsagor. I mängdläran formulerade vi det som att $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ och $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ och i satslogiken lyder de $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ och $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$. Snittoperationen för mängder ($\cap$) fungerar som konjunktionen för utsagor ($\wedge$) och unionoperationen för mängder ($\cup$) fungerar som disjunktionen för utsagor ($\vee$). Detta är ingen slump. I själva verket är satslogik och mängdlära exempel på en speciell form av kalkylsystem som förekommer i andra sammangang också. Vi ger en definition.

Definition: En *Boolesk algebra* är en mängd av objekt, S, tillsammans med två operationer, $+$ och $*$ sådana att följande regler gäller: (a, b och c är godtyckliga element i S)

1. Kommutativa lagarna: $a + b = b + a$ och $a * b = b * a$
2. Associativa lagarna: $(a + b) + c = a + (b + c)$ och $(a * b) * c = a * (b * c)$
3. Distributiva lagarna: $a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$ och $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$

Vidare finns distinkta element 0 och 1 i S sådana att:

4. 0 är ett neutralt element för $+$: $a + 0 = 0 + a = a$
5. 1 är ett neutralt element för $*$: $1 * a = a * 1 = a$

För varje a i S existerar det ett element i S som vi betecknar $-a$. Detta element kallas *komplementet* till a eller *negationen* till a och uppfyller

6. Komplementlagarna: $a + (-a) = 1$ och $a * (-a) = 0$.

För mänglära spelar union ($\cup$) , snitt ($\cap$) och komplement (A^c) rollerna av $+$, $*$ och tagandes av komplement ($-a$). Den universella mängden U spelar rollen av 1 och den tomma mängden ($\emptyset$) spelar rollen av 0. När det gäller utsagor spelar disjunktion ($\vee$), konjunktion ($\wedge$) och negation ($\neg$) rollerna av $+$, $*$ och tagandes av komplement ($-a$). Vi kan även formera en utsaga som alltid är sann som kallas t (för *tautologi*) och en utsaga som alltid är falsk som kallas c (för *contradiction*). Utsagorna t och c spelar då rollerna av 1 respektive 0.

Blandade övningar

Blandade övningar är normalt av tentamenskaraktär, dock är inte Venndiagram en formellt acceptabel bevismoetod så i ett tentamenssammanhang kan det krävas att uppgifterna löses med mer formella bevismetoder till exempel med elementargument eller med hjälp av mängdlagar. I alla övningar där Venndiagram används, skapa också ett parallell formella argument.

2.1. Ange uttryck med mängdsymboler, A, B, C och union-, snitt- och mängddifferenstecken för mängderna symboliserade i följande Venndiagram:

Diagram 1.

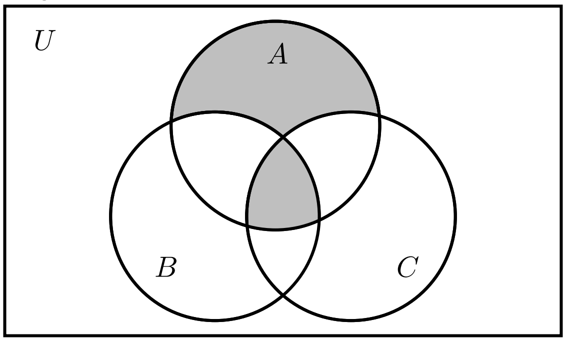


Diagram 2.

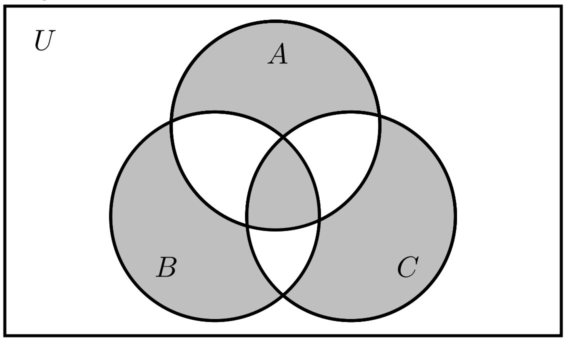


Diagram 3.

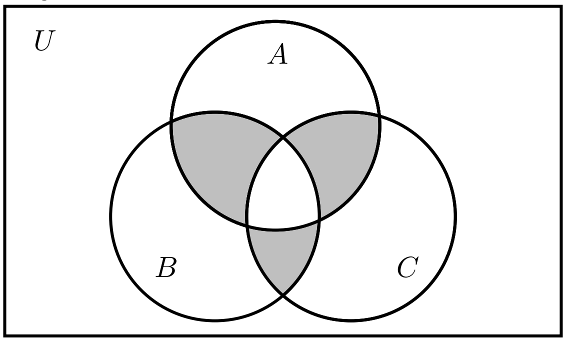
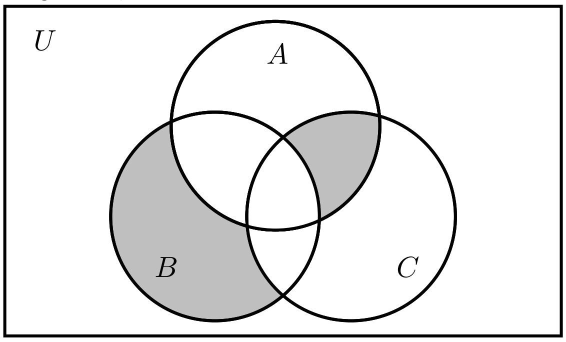


Diagram 4.



2.2. Låt A och B vara mängder i ett universum U. Rita mängderna $A-(A-B)$ och $B-(B-A)$ i två Venndiagram. Hur är relationen mellan dessa två mängder? Kan du skriva dessa mängder med en annan symbol?

2.3. Låt A och B vara mängder i ett universum U. Den *symmetriska differensen* mellan A och B defineras då som

$$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A).$$

(a) Illustrera $A \oplus B$ i ett Venndiagram.
(b) Förenkla $A \oplus \emptyset$, $A \oplus A$, $A \oplus U$, $A \oplus A^c$.
(c) Visa att $\oplus$ är associativ, det vill säga att $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$ för alla mängder A, B och C.

2.4. Med ett *elementargument* menas en form av bevis av att mängder är lika via klammernotation. För mängder A och B i ett universum U kan vi till exempel skriva $A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$. Här ser vi tydligt hur konjunktion kopplas ihop med snitt. Vi har vidare $A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$ som visar hur union och disjunktion r relaterade och för komplementet gäller $A^c = \{x \in U : \neg x \in A\}$.

Vi kan nu bevisa DeMorgans lag för mängder direkt med klammernotation med DeMorgans lag för utsagor enligt

$$(A \cup B)^c = \{x \in U : \neg(x \in A \cup B)\} = \{x \in U : \neg(x \in A \vee x \in B)\} =$$

$$\{x \in U : \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)\} = \{x \in U : x \in A^c \wedge x \in B^c\} = A^c \cap B^c.$$

(a) Visa andra varianten av DeMorgans lag, det vill säga att $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
(b) Visa att union och snitt är associativa med hjälp av elementargument. (Det vill säga, visa för alla mängder A, B och C att $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ och samma sak för $\cap$.)
(c) Konstruera också bevis för distributiva lagarna, absorptionslagarna och idempotens.

2.5. Visa, antingen med ett elementargument eller med vanlig mängdalgebra, mängdidentiteten

$$(A \cap B) - (C \cup D) = (A - C) \cap (B - D) = (A - D) \cap (B - C).$$

2.6. Visa, antingen med ett elementargument eller med vanlig mängdalgebra, mängdrelationen

$$(A \cup B) - (C \cup D) \subset (A - C) \cup (B - D).$$

Vad kan du säga om $(A \cup B) - (C \cup D)$ och $(A - D) \cup (B - C)$?
Från tentamen i diskret matematik, datum okänt.

2.7. Låt $i(x)$ vara predikatet ”x är intressant” och låt D vara domänen av alla frågor. Teckna, med kvantorer följande utsagor:

1. Alla frågor är intressanta.
2. För alla frågor gäller att de inte är intressanta.
3. Det finns en fråga som är intressant.
4. Det finns ingen fråga som är intressant.
5. Det är inte alla frågor som är intressanta.
6. Det finns en fråga som inte är intressant.
7. Det finns inte en enda fråga som inte är intressant.
8. Det är inte alla frågor som inte är intressanta.

Man kan para ihop dessa utsagor två och två i par av ekvivalenta utsagor. Ange hur. (Exempel: 1 och 7 är ekvivalenta.)

2.8. En person A säger till en person B: ”Angående dig så kan vi knappast säga att det inte är någon större brist på okunnighet som saknas.” Var detta en komplimang? (Ledning: Lagen om dubbel negation säger att $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$ för alla utsagor p.)

2.9. Avgör om regeln $A - (A - B) = A \cap B$ är sann eller inte. Om den är sann, ge ett bevis med Venndiagram eller med formelmanipulation. Om den inte är sann ange ett exempel på två mängder A och B som inte uppfyller regeln.

2.10. Avgör om regeln $A \cap (B \cup C) \subset B \cup (A \cap C)$ är sann eller inte. Om den är sann, ge ett bevis med Venndiagram eller med formelmanipulation. Om den inte är sann ange ett exempel på tre mängder A, B och C som inte uppfyller regeln.