KAPITEL 3 - FUNKTIONER

1. En ordentlig definition av vad en funktion är

Tidigare har vi stött på funktioner när det gäller tal, vi kallar en visst tal x och funktionen f fungerar så att den skapar ett nytt tal y hörande till varje tal x och vi skriver då $y = f(x)$. Exempel på funktioner som vi stött på är

$$f(x) = e^x \qquad g(x) = \sin x \qquad h(x) = 2x^3 + 4x^2 - x + 10 \qquad k(x) = ln(x)$$

eller vilken annan kombination som helst av matematiska uttryck. (Vi använder olika bokstäver för att beteckna olika funktioner.) Vi ska nu ta fasta på ungefär vad en funktion är för något. Vi gör en *vag* definition:

Definition: *(Vag.)* En *funktion* f är en regel som till varje element x (som kallas *argument*) i en mängd A ordnar ett element y i en mängd B. Vi skriver då

$$f : A \to B \qquad y = f(x)$$

och detta utläses f *går från* A *till* B och f *antar* y *i* x. Mängden A kallas funktionens *definitionsmängd* (eller *domän* engelska: *domain*) och mängden B kallas funktionens kodomän (engelska: *co-domain*). Om $y = f(x)$ så säger vi också att "x avbildas på y" och att y är "bilden av x". Om x och y är tal så kan vi också säga att f antar värdet y i x. Mängden av element i B som funktionen antar kallas funktionens *värdemängd*.

Det som är viktigt är att det ordnas *precis* ett element y till varje element x. Vi får till exempel *inte* en funktion av följande regel: För varje positivt reellt tal x välj ett tal y som uppfyller $y^2 = x$. Om vi väljer $x = 9$ så ordnar denna regel *två* tal $y = 3$ och $y = -3$ till $x = 9$. Däremot blir ovanstående regel en funktion om vi också kräver att talet som tas fram ska vara positivt, den funktionen brukar då betecknas $f(x) = \sqrt{x}$.

Definitionen av funktion ovan var vag. Vad menas med en "regel"? Vad menas med att "ordna" ett element y till varje element x? För att skapa klarhet här ska vi parallellt arbeta med ett bättre sätt att definera funktioner. Det här sättet kommer att hjälpa oss att förstå vad det *egentligen* innebär att invertera en funktion och det kommer också att underlätta framtida studier av så kallade *relationer*. Så vi gör en alternativ definition av funktion:

Definition: *(Inte vag.)* Låt A och B vara två mängder. En *funktion* f från A till B är då en delmängd av $A \times B$. Alltså gäller $f \subset A \times B$. Vidare ska f ha följande egenskaper:

(1) $\forall x \in A : \exists (x, y) \in f$.
(2) $(x, y_1), (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$.

Mängden A kallas funktionens *definitionsmängd* (eller *domän*) och mängden B kallas funktionens *kodomän*. Vidare om $(x, y) \in f$ så säger vi att "x (som också kallas *argument*) avbildas på y" och att y är "bilden av x". Om x och y är tal så kan vi också säga att f antar värdet y i x. Mängden av element i B som funktionen antar kallas funktionens *värdemängd* (även om vi inte har en funktion som befattar sig med tal).

Vi ska snart ta exempel för att förklara det här bättre. Vi noterar först bara att den här definitionen är **precis**. Nu har vi ingen "regel" som "ordnar" element till andra element, en funktion är bara en delmängd av kryssprodukten mellan domän och kodomän – det vet vi vad det är, alltså en mängd av par. Men vi har också två speciella krav som vi numrerar 1 och 2 i definitionen. Det första kravet säger att det ska finnas ett värde (eller element) b associerat till varje värde (eller element) $a \in A$. Det andra kravet säger att det får finnas *högst* ett värde associerat med varje värde $x \in A$, för om vi har två värden (y_1 och y_2) associerade till samma x så blir de samma värde som vi kan kalla y. Dessa båda krav innebär att vi för en funktion $f : A \to B$ kan skriva

$$(x, y) \in f \qquad \text{eller} \qquad y = f(x)$$

och att dessa båda definitioner egentligen är fullständigt ekvivalenta. (Och snarare kan vi säga att den andra definitionen är en *precisering* av den första definitionen.)

Så hur kan vi se att de här definitionerna är ekvivalenta? Vi studerar ett antal exempel. Låt oss se hur den allra enklaste funktionen $y = f(x) = x$ beskrivs på de båda sätten. Ja, om vi skriver $y = f(x) = x$ så har vi redan beskrivit en funktion med det första sättet, det är ju så som vi är vana att se på funktioner, definierade

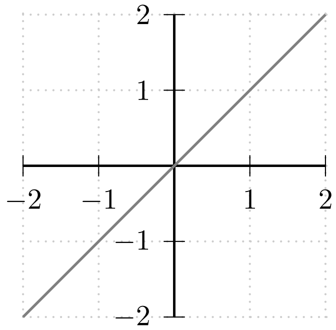

Figure 1. Graf över funktionen $y = f(x) = x$.

som ett explicit uttryck (alltså att funktionens värde anges, snarare än att vi anger funktionen som en mängd av par). Om vi håller på med tal (som vi kanske är mest vana vid) så kan vi rita en graf över funktionen $y = f(x) = x$ i figur 1.

Och den här funktionen är den enklaste funktionen av allihop, alltså funktionen som bara tar ett värde x och avbildar på sig själv, det vill säga $y = f(x) = x$.

Hur beskrivs nu denna funktion med det andra sättet? Jo om vi antar att definitionsmängden A och kodomänen B båda ges av intervallet från -2 till 2 (som figuren antyder) så blir funktionen f given av

$$f = \{(x, x) : -2 \leq x \leq 2\}$$

det vill säga vi anger alla par i $A \times B$ som har egenskapen att y-koordinaten helt enkelt sätts lika med x-koordinaten; detta definierar alltså funktionen på det andra precisa sättet med par.

Från tidigare matematikstudier är vi vana vid att definiera en funktion med ett matematiskt uttryck som nämnt ovan där vi hade funktionerna $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ och $g(x) = \sin x$, $x \in [-\pi, \pi]$ men det det mer precisa sättet att ange funktioner innebär ingen inskränkning, vi skriver

$$f = \{(x, e^x) : x \in \mathbb{R}\} \qquad \text{respektive} \qquad g = \{(x, \sin x) : \pi \leq x \leq \pi\}$$

för att ange funktionerna $f(x) = e^x$ respektive $g(x) = \sin x$ med de aktuella definitionsmängderna $\mathbb{R}$ respektive $[-\pi, \pi]$.

Vi noterar till sist att den mer generella och precisa definitionen av funktioner på ett tydligt sätt uttrycker att funktioner kan involvera andra saker än bara tal. Tidigare har vi varit vana vid att definiera funktioner via matematiska uttryck som mer anknöt till ordet "regel" och det var på det sättet naturligt att definiera en funktion som något slags "regel". Med den nya precisa definitionen kastar vi bort dessa otydligheter och säger att funktioner helt enkelt är en delmängd av kryssprodukten av sin domän och kodomän som uppfyller de där två kraven som fanns i definitionen.

Övningar

Finan: Exempel 20.1, Exempel 20.2, Exempel 20.4, Exempel 20.6, Exempel 20.10, Exempel 20.11, Exempel 20.12, Exempel 20.13, Exempel 20.14, Problem 20.1-20-4, Problem 20.9-20.13.

2. Egenskaper hos funktioner

Innan vi inför en del egenskaper av funktioner ska vi införa lite mer termer.

Definition: Om vi har en funktion $f : A \to B$ och $E \subset A$ så inför vi mängden $f(E)$ som är mängden av element i B som funktionen antar då argumenten väljs ur E. Mer formellt:

$$f(E) = \{f(x) : x \in E\}.$$

Denna mängd kallas då *bilden* av E *(genom f)*. Om $y = f(x)$ kan vi också kalla y för *bilden* av x *(genom f)*.

Om sammanhanget klart anger vilken funktion det är frågan om kan vi utelämna texten "genom f", det är därför den texten är satt inom parentes i definitionen.

Bilden av A är en funktions värdemängd och en funktions värdemängd betecknas ibland med V_f eller $Rngf$ (från engelskans *range* = "räckvidd").

I figur 2 illustrerar vi de hittills framtagna begreppen. Elementen x och y ligger i mängderna A respektive B och dessa mängder är förstås funktionen fs domän respektive kodomän. Innesluten i B symboliseras också värdemängden, $f(A)$, genom att ett inre område i B markerats med *f(A)*. En pil har införts också mellan elementen x och y för att markera riktningen i funktionen, f går *från* A *till* B. Vi skulle även kunnat inkludera en delmängd E i A och då skulle vi få rita in bilden av E genom f i $f(A)$. Den skulle då omslutit punkten $y = f(x)$ i högra delen av figuren innanför gränsen till det område som utgör $f(A)$.

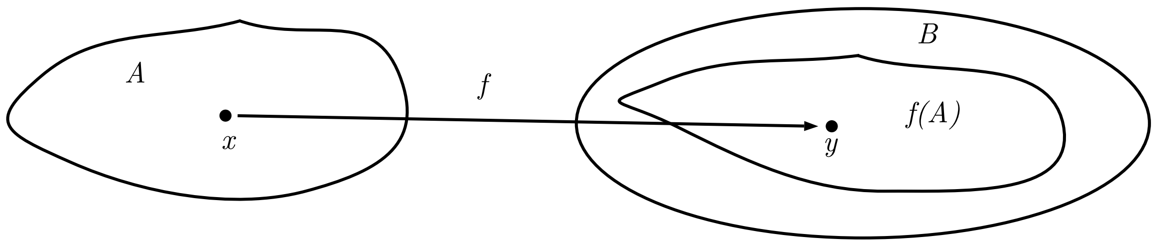

Figure 2. *En principiell skiss av begreppen kring funktioner*

Vi inför tre egenskaper hos funktioner.

Definition: Låt f vara en funktion med definitionsmängd A och kodomän B.

1. Om f antar alla värden i B minst en gång så kallas f *surjektiv*. Engelska: *onto/surjective*. Detta innebär att $f(A) = B$, funktionen antar alltså alla värden (element) i B.

2. Om f antar alla värden i B högst en gång så kallas f *injektiv*. Engelska: *one-to-one/injective*. Detta innebär att skilda argument avbildas på skilda funktionsvärden, det vill säga $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, för alla $x_1, x_2 \in A$ eller ekvivalent att $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, för alla $x_1, x_2 \in A$.

3. Om f antar alla värden i B precis en gång så kallas f *bijektiv*. Engelska: *bijective*.

Det står klart att en funktion är bijektiv precis då den är både injektiv och surjektiv.

Exempel: Funktionen f definierad för alla reella tal x given av det matematiska uttrycket $f(x) = x^3 - 3x$ är illustrerad i figur 3 (2 fel!).

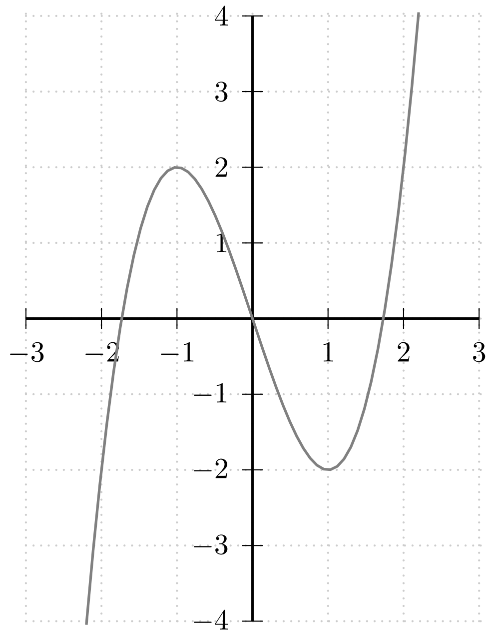

Figure 3. Graf över funktionen $y = f(x) = x^3 - 3x$.

Vi ser att alla värden längs y-axeln antas minst en gång, den här funktionen är alltså *surjektiv*. Men den är *inte* injektiv eftersom till exempel $f(0) = f(\sqrt{3}) = 0$ så funktionsvärdet 0 antas för *mer än ett* x, nämligen $x = 0$ och $x = \sqrt{3}$, alltså är implikationen $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ falsk för den här funktionen. (Värdet 0 antas till och med i ett tredje x också och det finns också fler funktionsvärden som antas mer än en gång.)

Exempel: Betrakta nu funktionen g som går från $\mathbb{Z}$ (alltså heltalen) till $\mathbb{Z}$ återigen given av $g(x) = x^3 - 3x$ (samma uttryck som det som definierade funktionen i figur 3 (2 fel)). Är denna funktion också surjektiv? Det är en *annan* funktion än den i figur 3 (2 fel) eftersom vi ändrat definitionsmängden, och frågan är då, är g också surjektiv eftersom f var surjektiv? Svaret blir faktiskt *nej*. För att se att det verkligen är så behöver vi hitta ett heltal som g aldrig antar. Om man studerar grafen ovan (som också kan användas för att dra slutsatser om g) så ser vi att vi inte kan ha något *heltal* x för vilket $g(x) = 3$. Vi missar värdet 3, på funktionsgrafen ser vi att det enda funktionsvärde som kommer nära 3 är $f(2) = 2$, men alla andra funktionsvärden är hopplöst långt ifrån 3.

Vi använder oss alltså av funktionsgrafen som är given i figur 3 för att dra slutsatser om en annan funktion som definieras av samma matematiska uttryck. Det *är* en annan funktion för dessa funktioner (f och g) har olika domäner och kodomäner. Och resonemangen har alltså gett att den ena är surjektiv (f) *men* att den andra funktionen (g) *inte* är surjektiv, trots att g definierades av samma matematiska uttryck som f. Det betyder alltså att när vi talar om en funktion så måste vi också ange vilken definitionsmängd och kodomäm som vi menar för att kunna dra slutsatser om funktionens egenskaper. Vi har som sagt samma matematiska uttryck som definierar de här båda funktionerna men trots det har de olika egenskaper.

Exempel: Vi ska nu se på en annan funktion $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. ($\mathbb{R}^+$ betyder här alla icke-negativa reella tal och $\mathbb{R}$ betyder som vanligt alla reella tal.) Vi definierar $h(x)$ som det *icke-negativa* tal y som uppfyller $y^2 = x$. Detta är då den vanliga rotfunktionen som vi skriver som $h(x) = \sqrt{x}$. Är den här funktionen surjektiv? Antar den alla värden i $\mathbb{R}$, nej, den antar inga negativa tal så funktionen h är inte surjektiv. Observera att om vi inskränker kodomänen till $\mathbb{R}^+$ så får vi en surjektiv funktion, men det blir då alltså noga taget en *annan* funktion.

Är denna funktion injektiv? Ja om vi tittar på funktionsgrafen (rita den!) så kan vi förmoda att den är det, men hur visar vi det? Jo, en injektiv funktion ska anta olika funktionsvärden i olika punkter, det vill säga vi ska visa att

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2).$$

Det här är en implikation och den är ekvivalent med sin kontraposition så vi kan lika gärna visa implikationen $\neg(h(x_1) \neq h(x_2)) \Rightarrow \neg(x_1 \neq x_2)$ som lättare kan skrivas

$$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Så välj alltså två stycken punkter, x_1, x_2, helt godtyckligt i h:s definitionsmängd och antag att $h(x_1) = h(x_2)$. Det betyder då alltså att $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$. Men här kan vi förstås kvadrera båda led så att vi får $(\sqrt{x_1})^2 = (\sqrt{x_2})^2$, vilket kan skriva om till just $x_1 = x_2$ som var det vi ville visa. Vi har alltså visat att funktionen h är injektiv.

Då det gäller reellvärda funktioner definierade på de reella talen kan man tolka injektivitet, surjektivitet och bijektivitet på följande sätt:

(1) En funktion är **injektiv** omm varje linje genom y-axeln, parallell med x-axeln, skär funktionsgrafen i *högst* en punkt.
(2) En funktion är **surjektiv** omm varje linje genom y-axeln, parallell med x-axeln, skär funktionsgrafen i *minst* en punkt.
(3) En funktion är **bijektiv** omm varje linje genom y-axeln, parallell med x-axeln, skär funktionsgrafen i *exakt* en punkt.

Vi studerar nu ett par exempel på injektivitet och surjektivitet men där vi använder notationen med par för funktioner.

Exempel: Antag att $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och $B = \{x, y, z, w\}$ och att

$$f = \{(1, x), (2, y), (3, z), (4, y), (5, x)\}$$

Bokstäverna x, y, z och w symboliserar bara abstrakta element och är alltså inte nödvändigtvis tal. Definitionen med par ovan är ekvivalent med att säga $f(1) = x, f(2) = y, f(3) = z, f(4) = y$ och $f(5) = x$. Den här funktionen har värdemängden $V_f = \{x, y, z\}$, och den är alltså *inte* injektiv, eftersom x (och y) är bild av två olika element i A. Faktiskt kan det inte finnas någon injektiv funktion från A till B ... varför?

Exempel: Antag att $A = \{1, 2, 3, 4\}$ och $B = \{x, y, z, w, u\}$ och att

$$f = \{(1, x), (2, y), (3, z), (4, w)\}$$

Eftersom $V_f = \{x, y, z, w\} \neq \{x, y, z, w, u\} = B$, så är den här funktionen inte surjektiv. Ingen funktion från A till B kan vara surjektiv ... varför? Funktionen är däremot injektiv eftersom varje element i B är bilden av högst ett element i A. Detta är precis samma sak som att säga att alla element $f(1), f(2), f(3), f(4)$ är olika och för den här funktionen gäller alltså implikationen $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Exempel: Antag att $A = \{1, 2, 3, 4\}$ och $B = \{x, y, z, u\}$ och att

$$f = \{(1, u), (2, y), (3, y), (4, x)\}, \text{ samt } g = \{(1, u), (2, z), (3, y), (4, x)\}.$$

Vi definierar alltså två olika funktioner med samma domän och kodomän. Funktionen f är inte injektiv (eftersom $y = f(2) = f(3)$ och 2 och 3 är två olika element i A). Vidare eftersom f inte antar värdet z så är inte f heller surjektiv. Om vi dock studerar funktionen g så ser vi att den är både injektiv *och* surjektiv det vill säga den är bijektiv.

Vi tar nu ett exempel som kommer att kräva en del förståelse för egenskaper hos heltalen. Vi har ännu inte fördjupat oss i heltalen så det kan vara värt att återvända till det här exemplet senare om det är svårt att förstå idag.

Exempel: Definiera $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ genom $f(x) = 2x^4 - x$. Avgör om f är surjektiv och/eller injektiv.

Lösning: Vi kan skriva $f(x) = x(2x^3 - 1)$ och om $x < 0$, så är detta uttryck positivt. På samma sätt, om $x \geq 0$ så, eftersom $2x^4 \geq x$ för alla icke-negativa heltal, så kommer värdena av f vara icke-negativa för alla icke-negativa x. Allt detta betyder att funktionen bara antar icke-negativa värden och därför kan den *inte* vara surjektiv. (Kodomänen är ju $\mathbb{Z}$ som också innehåller negativa tal.)

Kan funktionen vara injektiv? Om vi kan visa att implikationen $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ för alla $x, y \in \mathbb{Z}$ så har vi visat injektivitet. (Observera att vi använder bokstäverna x och y nu för värden i *domänen*, tidigare refererade symbolen y till värden i *kodomänen* men här låter vi y också referera till element i domänen).

Antag alltså att vi har $f(x) = f(y)$ men att $x \neq y$. Då gäller

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow 2x^4 - x = 2y^4 - y \Leftrightarrow 2(x^4 - y^4) = x - y$$

och eftersom $x^4 - y^4 = (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$ så kan vi förkorta med $(x - y)$ (eftersom vi antog $x \neq y$) och det ger oss ekvationen

$$2(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) = 1$$

men detta är omöjligt eftersom x, y är heltal. Här hävdas nämligen att 1 är produkten av 2 och heltalet $(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$, vilket skulle betyda att 1 skulle vara ett *jämnt* tal, vilket är en motsägelse. Antagandet om att $f(x) = f(y)$ men att $x \neq y$ måste alltså vara felaktigt och därmed måste alltid motsatsen till detta antagande gälla, men motsatsen till detta antagande är precis implikationen $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ vilket visar att funktionen är injektiv.

Övningar

Finan: Exempel 21.1, Exempel 21.3, Exempel 21.5, Exempel 21.6, Exempel 21.8, Problem 21.1, Problem 21.2, Problem 21.3, Problem 21.4, Problem 21.6, problem 21.7, Problem 21.8.

3. Bijektiva funktioner och inverser

Som vi konstaterade i definitionen av injektivitet och surjektivitet så är bijektivitet samma sak som att en funktion är både injektiv och surjektiv. Sådana funktioner är väldigt viktiga i matematiken för vi kan *invertera* dem. Vi ska se vad det betyder snart. Vi börjar med att studera närmare vad det innebär att en funktion är bijektiv.

Exempel: Vi tar ett lite annorlunda exempel. Vi definierar en funktion, inte som ett matematiskt uttryck, utan genom att helt ange vad den ska anta. Betrakta en postkö bestående av fyra personer, Anna, Antonio, Sahar och Kalle. Om de personerna ställer sig i den ordning de är angivna så kan vi ge varje person ett könummer: Anna får 1, Antonio får 2, Sahar får 3 och Kalle får 4. Nu har vi skapat en funktion som vi kan kan kalla q som går från mängden av personer, $\{Anna, Antonio, Sahar, Kalle\}$, till mängden av de fyra första postiva heltalen, $\{1, 2, 3, 4\}$ genom att säga att

$$q(Anna) = 1 \quad q(Antonio) = 2 \quad q(Sahar) = 3 \quad q(Kalle) = 4.$$

Det här är en definition som är lika bra som matematiska uttryck, det viktiga är att funktionsvärdena blir bestämda och det blir de här, inte som matematiska uttryck men de är ändå bestämda. (Vi kan ju inte utföra några räkneoperationer på personer, "$Kalle + 3 \cdot Antonio - Anna$" betyder ju ingenting!)

Det viktiga är att funktionen q är *bijektiv*. Den är det eftersom den både är surjektiv (alla värden 1,2,3,4 antas minst en gång) och injektiv (värden antas högst en gång) så vi ser att alla värden antas precis en gång. Detta är bijektivitet och det innebär att varje element i mängden $\{Anna, Antonio, Sahar, Kalle\}$ paras ihop med precis ett av elementen i $\{1, 2, 3, 4\}$. Men då kan det här gå åt båda hållen: funktionen q ger ett könummer för varje person, men funktionen q ger också en person för varje könummer! Vi kan alltså definiera en ny funktion, $r : \{1, 2, 3, 4\} \to \{Anna, Antonio, Sahar, Kalle\}$ genom att säga

$$r(i) = \text{den person som har könummer } i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Om vi tänker efter så är det precis det här som händer varje gång några personer går in i en affär med kölappar, först går Anna, Antonio, Sahar och Kalle in i affären och tar varsinn kölapp, då definieras funktionen q (för att alla har en tilldelad kölapp, och precis en kölapp var – en bijektiv funktion har bildats) och sen när expediten ropar upp numrena så används funktionen r, expediten säger, "vem har nummer 1"? Och frågar alltså efter $r(1)$, vem som alltså har nr 1 (och det kan bara vara en eftersom funktionen q är bijektiv), och så vidare med $r(2), r(3)$ och $r(4)$. Funktionen r brukar kallas funktionen q:s *invers* och vi har alltid att inversens definitionsmängd är hela kodomänen hos den funktion vi inverterar och inversens värdemängd är den inverterade funktionens definitionsmängd. Alltså:

$$D_q = V_r = \{Anna, Antonio, Sahar, Kalle\} \qquad D_r = V_q = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Vi ger detta i en formell definition:

Definition: Låt $f : A \to B$ vara en bijektiv funktion. Funktionen $f^{-1} : B \to A$ definierad genom

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

kallas då funktionen f:s *invers*. Funktionen f kallas också en *ett-till-ett korrespondens* (engelska: *one-to-one correspondence*) mellan elementen i mängderna A och B.

Med vårt mer precisa sätt att se på funktioner är funktionen f en delmängd av $A \times B$ och det som vi vill skapa som invers till f, alltså f^{-1} blir då en delmängd till $B \times A$. Vidare betyder skrivsättet $y = f(x)$ att $(x, y) \in f$ och skrivsättet $x = f^{-1}(y)$ betyder, på liknande sätt, att $(y, x) \in f^{-1}$. När vi då säger (som i definitionen ovan) att

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

så är det endast ett alternativ sätt att säga att

$$\text{för alla } y \in B \text{ definieras } f^{-1}(y) \text{ som det } x \text{ som uppfyller } (x, y) \in f$$

vilket vidare blir samma sak som att säga att funktionen fs invers bildas genom definitionen

$$f^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in f\}.$$

Alltså genom att kasta om rollerna i alla par som bygger upp mängden $f \in A \times B$.

Det vi behöver göra nu är att lista ut under vilka förutsättningar konstruktionen $f^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in f\}$ *verkligen bildar en funktion*. Det är innehållet i nästa sats.

Sats: En funktion $f : A \to B$ har en invers $f^{-1} : B \to A$ om och endast om f är bijektiv (det vill säga både injektiv och surjektiv).

Bevis: Vi ska visa att två påståenden är ekvivalenta:

$$f : A \to B \text{ har en invers} \qquad \text{och} \qquad f : A \to B \text{ är bijektiv.}$$

Antag först att f har en invers. Vi ska nu visa att f är både injektiv och surjektiv.

För att visa injektivitet, tag x_1 och x_2 i A godtyckligt men antag också att $x_1 \neq x_2$. Vi vill visa att $f(x_1) \neq f(x_2)$. Eftersom f har en invers, f^{-1}, så är både x_1 och x_2 i A bilder av elementen $f(x_1)$ och $f(x_2)$ i B genom f^{-1} det vill säga vi har $x_1 = f^{-1}(f(x_1))$ och $x_2 = f^{-1}(f(x_2))$, det är precis så som inversen är definierad. Men om vi då hade haft $f(x_1) = f(x_2)$, vi kan kalla detta gemensamma värde för y, så hade inte inversen varit en funktion, då hade vi krävt $x_1 = f^{-1}(y)$ *och* $x_2 = f^{-1}(y)$ för ett enda värde på y, och det går ju inte eftersom vi antagit att $x_1 \neq x_2$, det hade motsagt att f^{-1} var en funktion alltså måste vi ha $f(x_1) \neq f(x_2)$ det vill säga vi har implikationen $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ vilket betyder att f är en injektiv funktion.

Vi ska nu visa surjektivitet, tag därför ett godtyckligt värde $y \in B$. Eftersom inversen existerar finns även $x = f^{-1}(y) \in A$. Men detta värde har exakt egenskapen att $f(x) = y$ och eftersom y var godtyckligt valt i B och tydligen är ett funktionsvärde till f så har vi visat surjektiviteten.

Sammantaget har vi visat att f är både injektiv och surjektiv, det vill säga bijektiv.

Vi visar nu omvändningen och antar därför att f är bijektiv.

Vi ska visa att vi kan skapa inversen till f. Definiera funktionen $g : B \to A$ på följande sätt:

$$g(y) = x$$

där x väljs så att $y = f(x)$. Vi behöver visa att det är möjligt att definiera den här funktionen. Eftersom f är surjektiv så *finns* ett $x \in A$ så att $f(x) = y$. Eftersom f är injektiv så är detta x entydigt bestämt vilket visar att funktionen g är väldefinierad. Eftersom $g(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$ och detta är det sätt som man skapar en invers på så har vi funnit att injektiviteten och surjektiviteten ger existensen av inversen. (g är alltså f^{-1}.) Beviset är klart.

Så för en bijektiv funktion och dess invers f^{-1} har vi alltså följande kedja av ekvivalenser

$$a = f^{-1}(b) \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1} \Leftrightarrow (a, b) \in f \Leftrightarrow b = f(a)$$

och så fort vi kan invertera en funktion så kan vi alltså kalkylera med dess invers.

Exempel: Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definierad av

$$f(x) = 2x + 1$$

kan inverteras. Det betyder att vi kan definiera en funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som "ogör" det som f gör. Det är förstås ett annat sätt att karakterisera vad inversen är. Vi kan hitta ett matematiskt uttryck som definerar g genom att lösa ekvationen $y = 2x + 1 \Leftrightarrow x = (y - 1)/2$ så att g ges av $g(y) = (y - 1)/2$ och om vi kombinerar detta med f, och beräknar $g(f(x))$ så får vi

$$g(f(x)) = \frac{f(x) - 1}{2} = \frac{2x + 1 - 1}{2} = \frac{2x}{2} = x,$$

det vill säga vi har fått tillbaka x och vi kan tolka detta som att inversen "ogjort" det som funktionen gjort.

Övningar

Finan Exempel 21.10, Problem 21.10-21.16.

4. Restriktioner av funktioner

Nu är det ju absolut inte alla funktioner som är inverterbara, om vi betraktar de elementära funktionerna

$$e^x, \qquad \sin x, \qquad \cos x, \qquad \tan x$$

och liknande så är ingen av dessa funktioner bijektiva om man betraktar dem som funktioner frå $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ ($\tan x$ är inte ens definierad i hela $\mathbb{R}$). Men om vi gör lämpliga inskränkningar i definitionsmängderna eller värdemängderna så kan vi få funktioner som är inverterbara. Observera att vi då egentligen inför *nya* funktioner som vi inverterar istället för de icke inverterbara funktionerna. Tag till exempel funktionen $y = \sin x$ som är illustrerad i figur 4.

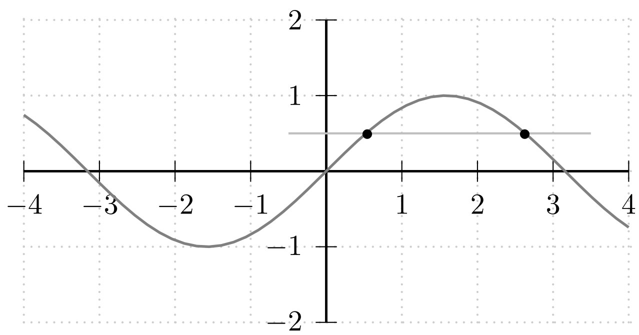

Figure 4. *Funktionen $y = \sin x$.*

I figur 4 har vi ritat in en bit av en linje genom y-axeln parallell med x-axeln. Linjen ligger på höjden $y = 0.5$ och går genom funktionskurvan i mer än en punkt. Två punkter är inritade i figuren men det räcker att poängtera att linjen skär funktionskurvan i mer än en punkt. Eftersom vi har två skärningar så har ekvationen

$$\sin x = 0.5$$

fler än en lösning och därför kan inte funktionen $y = f(x) = \sin x$ vara injektiv. Det existerar alltså ingen invers till den här funktionen. För att vara mer precisa så är det så att om vi söker lösningar till ekvationen

$$\sin x = a$$

där a är ett tal i intervallet $[0, 1]$ så kommer vi hitta en lösning α i intervallet $[0, \pi/2]$, men också en lösning i intervallet $[\pi/2, \pi]$ som ges av uttrycket $\pi - \alpha$. Vi ser de två punkterna svarandes mot lösningarna α och $\pi - \alpha$ markerade i figur 4. Det visar sig också att om vi studerar ekvationen

$$\sin x = b$$

där b ligger i intervallet $[-1, 0]$ så hittar vi lösningar på formen β och $-\pi-\beta$, där β ligger i intervallet $[-\pi/2, 0]$. Alla dessa lösningar ($-\pi - \beta$, β, α och $\pi - \alpha$) ligger i intervallet $[-\pi, \pi]$ men nu är även sinusfunktionen 2π-periodisk vilket innebär att vi har oändligt många lösningar så lösningarna kan skrivas på formen $x = \alpha + 2\pi k$, respektive $x = \pi - \alpha + 2\pi k$ där k kan väljas godtyckligt från hela $\mathbb{Z}$ för lösningar till $\sin x = a$ för positiva a respektive formen $x = \beta + 2\pi k$, respektive $x = -\pi - \beta + 2\pi k$ för lösningar till ekvationen $\sin x = b$ för negativa b. Men eftersom k kan väljas godtyckligt kan vi beskriva mängden av tal på formen $x = -\pi - \beta + 2\pi k$ istället med $x = \pi - \beta + 2\pi k$ så vi får *alltid* formen $x = \alpha + 2k\pi$ eller $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ för lösningar till ekvationen $\sin x = a$ för alla a i hela intervallet $[-1, 1]$ Det enda som kvarstår för att kunna finna dessa lösningar är att kunna lösa ekvationen

$$\sin x = a$$

givet att x ska ligga i intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$ och om vi inskränker oss till detta intervall och inte låtsas om att sinusfunktionen har andra värden utanför detta intervall så är funktionen inverterbar i det här intervallet. Den inversen kallas arcussinus. Vi formulerar detta på ett bra sätt:

Definition: Låt $f : A \to B$ vara en given funktion och låt $E \subset A$. Funktionen $g : E \to B$ definierad av $g(x) = f(x)$ kallas då för *restriktionen* av f till E.

I figur 5 (4 fel) ger vi en illustration av restriktionen av funktionen $f(x) = \sin x$ till intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$. Vi observerar i den här figuren att problemet med tvetydighet försvinner, genom att inskränka definitionsmängden (ja egentligen studera en annan funktion!) har vi kommit undan problemet. Det här är tekniska detaljer som vi inte ska gå igenom för alla trigonometriska funktioner, det bör vara känt. Definitionen av arcussinus är som invers till restriktionen av sinusfunktionen till intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$ och den allmänna lösningen till ekvationen $\sin x = a$ kan då tecknas som $x = \arcsin a + 2\pi k$ respektive $x = \pi - \arcsin a + 2\pi k$ där k väljs godtyckligt i hela $\mathbb{Z}$.

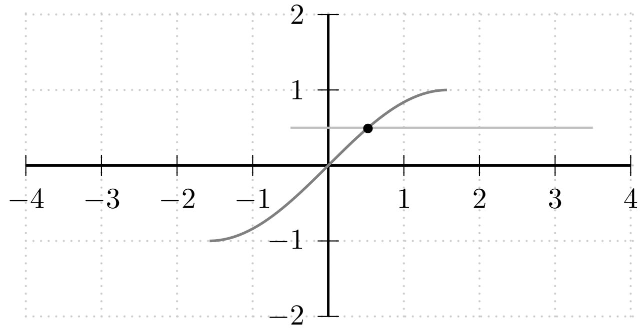

FIGURE 5. *Restriktionen av funktionen* $y = \sin x$ *till* $[-\pi/2, \pi/2]$.

Med denna teori kan vi lösa ett annat liknande problem:

Exempel: Lös ekvationen $e^{sin(x)} = 2$. Egentligen är ju inte heller funktionen $f(x) = e^x$ inverterbar, men om vi inskränker oss till att bara studera positiva värden så kan vi införa funktionen $\ln x$ som är den så kallade *naturliga logaritmen* som har egenskapen att

$$\ln e^x = x$$

det vill säga den fungerar som invers till e^x då vi inskränker kodomänen av funktionen $f(x) = e^x$ till de positiva reella talen. Med dess hjälp kan vi skriva

$$e^{\sin(x)} = 2 \Leftrightarrow \sin(x) = \ln(2).$$

och sedan använder vi det vi utrett om sinusfunktionen ovan för att konstatera att lösningarna tar formerna

$$\{\arcsin(\ln(2)) + k \cdot 2\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin(\ln(2)) + k \cdot 2\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Liknande utredningar och restriktioner av andra elementära funktioner är nödvändiga. Då uppkommer funktionerna $\arctan x$, $\arccos x$ och liknande, men vi går inte in på de tekniska detaljerna för dessa funktioner eftersom det ingått i tidigare kurser. Utredningen här kring sinusfunktionen ska mer tjäna som en allmän beskrivning av hur problematiken hanteras.

Övning

Givet att vi uppfattar funktionen $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ som inversen av restriktionen av funktionen $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ till intervallet $[0, \pi]$, lös ekvationen

$$e^{cos(x)} = 2$$

i $\mathbb{R}$. (Det vill säga hitta alla reella tal x som uppfyller ekvationen och uttryck dem med hjälp av arccos-funktionen.)

5. Sammansättning av funktioner

Vi vill nu studera mer generellt vad som händer när vi sätter samman flera funktioner. Vi har sett en sammansättning av två funktioner ovan: $f(x) = e^{\sin x}$, men för att kunna studera detta noggrannt behöver vi först måste vi definiera vad som menas med att ”sätta samman” funktioner.

Definition: Om $f : A \to B$ och $g : B \to C$ är funktioner så definieras *sammansättningen* av g och f som funktionen som betecknas med $g \circ f : A \to C$. Den är given av

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

för alla $x \in A$.

Vi tar ett exempel där vi använder parnotationen för funktioner för att skapa maximal tydlighet.

Exempel: Låt $f = \{(1, x), (2, y), (3, z), (4, w)\}$ och $g = \{(x, a), (y, b), (z, c), (w, d)\}$. Då ger definitionen av sammansättning att $g \circ f$ är given av

$$g \circ f(1) = g(f(1)) = g(x) = a \quad g \circ f(2) = g(f(2)) = g(y) = b$$

$$g \circ f(3) = g(f(3)) = g(z) = c \quad g \circ f(4) = g(f(4)) = g(w) = d$$

så att funktionen $g \circ f$ blir $\{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$.

Det är sällan som $g \circ f = f \circ g$, i exemplet ovan så *existerar inte ens* $f \circ g$ så den kan ju ännu mindre vara $g \circ f$. Men även om båda funktionerna $f \circ g$ och $g \circ f$ existerar, så är det inte så stor sannolikhet att de är samma funktion.

Vi introducerar nu ett formellt namn för den lättaste funktionen av allihop:

Definition: För vilken mängd som helst A så introduceras *identitetsfunktionen* $\iota_A : A \to A$ som den funktion som uppfyller $\iota_A(x) = x$ för alla $x \in A$. I termer av ordnade par har vi

$$\iota_A = \{(x, x) : x \in A\}.$$

Funktionen anses normalt ha domän = kodomän = A men vi kan också anse att funktionen är väldefinerad om den har en större kodomän än A. Ibland utelämnas också indexet A då det är klart vilken mängd A är.

Exempel: Identitetsfunktionen ι fungerar som en identitet när den sätts samman med andra funktioner. Tag till exempel funktionen f ovan given av $f = \{(1, x), (2, y), (3, z), (4, w)\}$. Vad blir $\iota \circ f$? Om vi skriver upp den funktionen med parnotation får vi:

$$\{(1, \iota(f(1))), (2, \iota(f(2))), (3, \iota(f(3))), (4, \iota(f(4)))\} = \{(1, f(1)), (2, f(2)), (3, f(3)), (4, f(4)\}$$

eftersom vi alltid har $\iota(y) = y$ för alla y. Men då ges funktionen av

$$\{(1, f(1)), (2, f(2)), (3, f(3)), (4, f(4)\} = \{(1, x), (2, y), (3, z), (4, w)\}$$

som förstås bara är f själv. Det betyder att $\iota \circ f = f$. På samma sätt ser vi att $f \circ \iota = f$ så att vi tydligen har $\iota \circ f = f = f \circ \iota$. I detta resonemang är det ingenting som är speciellt med just funktionen f, det kan göras med vilken funktion som helst så vi har alltså identiteten

$$\iota \circ f = f = f \circ \iota$$

för *alla* funktioner f. Det här betyder som sagt ovan att ι sammansatt med andra funktioner beter sig precis som talet 1 när det multipliceras med andra tal: $1 \cdot x = x = x \cdot 1$ för alla x och det här är anledningen att vi kallar ι *identitetsfunktionen.*

När är två funktioner samma funktion? Det är lätt att avgöra det. Eftersom funktioner formellt sett är mängder av par, och två mängder är lika precis då de innehåller samma element så blir två funktioner lika precis då de har samma domäner, kodomäner och har samma bilder för varje argument, dvs $f(x) = g(x)$ för alla $x \in A$.

Övningar

Finan Exempel 21.4, Exempel 21.7, Exempel 21.9

6. Sammansättning som en operation

Observera att med operationen sammansättning så har vi skapat en liknande situation som när vi infört andra operationer som konjunktion och disjunktion på utsagor och union och snitt och liknande på mängder. Sammansättning av två funktioner ger en ny funktion.

Vi har redan sett att funktionen ι fungerar som ett neutralt element vid sammansättning och vi har också sett att sammansättning inte ofta är kommutativ (vi har alltså inte ofta situationen $f \circ g = g \circ f$ för funktioner).

En egenskap som sammansättningsoperationen dock har är *associativitet.* Associativitet för addition av tal innebär att $(a + b) + c = a + (b + c)$ och det innebär att vi kan skriva $a + b + c$. Vi formulerar detta som en sats.

Sats: Sammansättning av funktioner är en associativ operation.

Bevis: Det som ska visas kan formuleras så här:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

där f, g och h är godtyckliga funktioner som kan sättas samman på detta sätt. Det betyder bara att funktionerna f, g, h är kompatibla, det vill säga om $f : A \to B$, så är g definierad i B och om $g : B \to C$, så är h definierad i C, det vill säga $h : C \to D$ (för någon mängd D.)

Om vi använder dessa namn på mängderna som är domäner och kodomäner tillhörandes funktionerna f, g, h och betecknar elementen i A med x, elementen i B med y, elementen i C med z och elementen i D med u, då blir beviset väldigt enkelt om vi observerar att för varje $x \in A$ gäller att om vi bildar elementen $y = f(x)$, $z = g(y)$ och $u = h(z)$, då är dessa tre element y, z, u alltid entydigt bestämda för alla x. Det är så eftersom vi arbetar med funktioner. Men vi behöver först lite terminologi, inför beteckningarna

$$w_1 \text{ för funktionen } (h \circ g) \circ f \qquad \text{och} \qquad w_2 \text{ för funktionen } h \circ (g \circ f),$$

då har vi $w_1 : A \to D$ och $w_2 : A \to D$ och dessa två funktioner vill vi visa är en och samma. Att dessa funktioner är samma funktion är precis uttalandet att

$$\forall x \in A : w_1(x) = w_2(x)$$

så för att visa att detta gäller så antar vi motsatsen. Antag alltså att det finns ett $x \in A$ med $u' = w_1(x) \neq u'' = w_2(x)$. Om vi skriver ut detta i detalj blir det $u' = w_1(x) = ((h \circ g) \circ f)(x) \neq (h \circ (g \circ f))(x) = w_2(x) = u''$. Men vad är u' och u''? Vi går till definitionen av sammansättning och får

$$u' = ((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h(g(y)) = h(z) = u$$

$$u'' = (h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = h(g(y)) = h(z) = u$$

så att u' och u'' tydligen måste vara lika med ett gemensamt värde u, det var det här värdet som var entydigt bestämt för att vi arbetar med funktioner. Alltså har vi $u' = u = u''$ men det motsäger antagandet. Slutsatsen blir att det inte kan finnas något $x \in A$ med $w_1(x) \neq w_2(x)$, alltså måste vi ha $\forall x \in A : w_1(x) = w_2(x)$ vilket är precis samma sak som $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ och beviset är klart.

Slutligen formulerar vi bara en sats utan bevis:

Sats: Funktionerna $f : A \to B$ och $g : B \to A$ är varandras inverser om och endast om $g \circ f = \iota_A$ och $f \circ g = \iota_B$.

Exempel: Låt A vara mängden av alla positiva reella tal och låt B vara intervallet $(0, 1)$. Visa att funktionerna $f : A \to B$ och $g : B \to A$ definierade av

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad \text{and} \quad g(y) = \sqrt{\frac{1}{y} - 1}$$

är varandras inverser.

Lösning: Det räcker att visa att $f \circ g = \iota_B$ och $g \circ f = \iota_A$.

1. För varje $y \in B$ (= intervallet $(0, 1)$) har vi

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = \frac{1}{(g(y)^2 + 1)} = \frac{1}{(\sqrt{\frac{1}{y} - 1})^2 + 1} = \frac{1}{\frac{1}{y} - 1 + 1} = 1/(\frac{1}{y}) = y.$$

   Eftersom detta gäller för alla $y \in B$ har vi visat att $f \circ g = \iota_B$.

2. För alla $x \in A$ (de positiva reella talen) har vi

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{1}{f(x)} - 1} = \sqrt{1/(\frac{1}{x^2 + 1}) - 1} = \sqrt{x^2 + 1 - 1} = \sqrt{x^2} = x.$$

   återigen, eftersom x var godtyckligt har vi visat att $g \circ f = \iota_A$.

Eftersom både $f \circ g = \iota_B$ och $g \circ f = \iota_A$ gäller så drar vi slutsatsen att funktionerna måste vara varandras inverser.

Om vi granskar beviset ovan för att en funktion har en invers om och endast om den är bijektiv så följer det också av det beviset att inversen är entydigt bestämd, så vi kan tala om *inversen* till en funktion. Men vi kan också skapa ett bevis för entydigheten hos en invers genom att beakta sammansättningsoperationen, $\circ$. Vi kan formulera oss så här:

Sats: Antag att funktionen $f : A \to B$ har en invers $f^{-1} : B \to A$. Då är f^{-1} entydigt bestämd.

Bevis: Antag att det finns två inverser, $f_1^{-1} : B \to A$ och $f_2^{-1} : B \to A$ som alltså båda uppfyller

$$f \circ f_1^{-1} = \iota \qquad f \circ f_2^{-1} = \iota \qquad f_1^{-1} \circ f = \iota \qquad f_2^{-1} \circ f = \iota.$$

Då har vi

$$f_1^{-1} = \iota \circ f_1^{-1} = (f_2^{-1} \circ f) \circ f_1^{-1} = f_2^{-1} \circ (f \circ f_1^{-1}) = f_2^{-1} \circ \iota = f_2^{-1}$$

och entydigheten av inversen är visad genom ett rent mängdteoretiskt argument. (Vi har inte explicit angett exakta definitionsmängder på ι i beviset, men de ska uppfattas som att de finns där implicit.)

Övningar

Finan Problem 21.10 – Problem 21.16.

Avsnittet om funktioner är inte tänkt att vara ett av de svårare avsnitten i kursen, det betyder att till detta kapitel saknas blandade problem som är av tentamenskaraktär, det är tänkt att de problem som ges i kapitlet redan är av tentamenskaraktär.