KAPITEL 1 - LOGIK

Logik och mängdlära är grundplåtar för all matematik och därmed mycket betydelsefulla för teknologi och ingenjörskonst, varför vi behandlar dessa ämnen i två inledande kapitel. Framställningen kommer att vara *naiv* vilket betyder att vi antar att det går att utveckla logik och mängdlära utgående från att vi som människor har en grundläggande uppfattning om vad logik och mängder är för någonting. Vi skulle kunna säga att vi utgår från att vi alla har ”sunt förnuft” och en av våra målsättningar i dessa två första kapitel är att sätta detta sunda förnuft på en mer stabil grund och hjälpa oss att uttrycka oss klarare.

1. Utsagor

I matematik befattar man sig ofta med studiet av vad som är sant och vad som inte är sant. Det centrala i detta studium är vad man brukar kalla *utsagan*. En utsaga är en mening eller ordföljd som har ett sanningsvärde, det vill säga antingen sant eller falskt. (Vi säger alltså att ”sant” och ”falskt” är de två sanningsvärdena.) Vi tar ett par exempel på meningar där några är utsagor och några inte är utsagor.

Exempel: Meningar och ordföljder som är utsagor:

(1) Jag är en fisk (Falsk)
(2) Månen är en ost (Falsk)
(3) $2 + 2 = 4$ (Sann)
(4) Getter kan flyga (Falsk)
(5) Getter har fyra ben (Sann)

Exempel: Meningar och ordföljder som *inte* är utsagor:

(1) Rock and roll
(2) Sikta på tavlan!
(3) Två liter mjölk, en ost och bröd.
(4) Detta påstående är falskt.

Vi skulle kunna tro att skillnaden mellan ordföljder och meningar som är utsagor och de som inte är utsagor är att i utsagan *händer* någonting. Vi har ett subjekt och ett predikat. Och det räcker ganska långt. De första tre exemplen bland de som inte är utsagor är exempel på ordföljder *utan* subjekt och predikat så de kan inte vara utagor, det händer ingenting här, de är inte påståenden. Observera dock att i sista exemplet så liknar meningen en utsaga, vi har ett subjekt och ett predikat, men denna mening kan ändå inte tilldelas ett sanningsvärde. Fundera på varför det är så.

Vi kommer i detta inledande kapitel att använda bokstäver för att beteckna utsagor och utveckla en kalkyl med dessa. Vi skulle till exempel kunna komma att beteckna utsagan ”Jag är en fisk” med p eller någon annan bokstav. Vi gör en definition av utsaga där vi inför en bokstav (p) för att referera till utsagan:

Definition 1.1: En utsaga är en mening, följd av ord eller symboler som vi kan tilldela ett sanningsvärde. Om p är en utsaga säger vi att p *är falsk* om p har sanningsvärdet falsk och vi säger att p *är sann* om p har sanningsvärdet sann.

Om vi läser texten i definitionen så blir vi kanske förvirrade, det låter som att vi inte inför någonting nytt här och det är ett uttryck för att framställningen är naiv. Det kan därför låta svårt eller konstigt, men det är egentligen enkelt. I någon mening är det *för* enkelt. När man sätter logik och mänglära på en stabil grund så är det inte så här det går till. Men en fullständigt välgrundad framställning av logiken ligger tyvärr utanför ramen för denna framställning.

Övning på utsagor

1.1.1. Vilka av nedanstående fem meningar (a-e) är utsagor? För de som är utsagor, ange om de är sanna eller falska.

a. Sport är intressant.
b. Ät upp maten!
c. $1 + 1 = 2$.

d. Alla människor har lika värde.
e. $1 + 1 = 56$.

2. Konjunktion

Vi kommer nu stegvis att utveckla en kalkyl med utsagor. Denna kalkyl kallas *satslogik* och kommer att involvera operationer som kan utföras på utsagor. Vi är vana vid att räkna med tal, vektorer och matriser så att införa operationer på utsagor är inte alls mystiskt.

Den första operationen kallas *konjunktion* som innebär att vi av två utsagor p och q bildar den utsaga som är sann då precis *både* p och q är sanna. Vi tar en definition:

Definition 1.2: Låt p och q vara två givna utsagor. Med *konjunktionen av p och q* menas då den utsaga som är sann precis då både p och q är sanna. Vi skriver konjunktionen av p och q med $p \wedge q$. Detta utläses ”*p och q*” eller ”*konjunktionen av p och q*”.

När vi säger att ”konjunktionen är en operation *på* utsagor” menar vi att operationen (konjunktionen) ger en ny utsaga som resultat. Det här är precis som med tal (eller andra matematiska objekt), vi skulle kunna säga att ”multiplikation är en operation *på* tal” och då menar vi att multiplikationen är en operation som tar två tal och ger ett nytt tal (produkten) som resultat, till exempel kan vi ta talen 2 och 3 och operationen ”multiplikation” ger oss då resultatet 6. Vi studerar ett exempel med utsagor som illustrerar samma princip:

Exempel: Beteckna utsagorna från det tidigare exemplet med p, q, r, s och t, det vill säga låt:

$p =$ ”Jag är en fisk”
$q =$ ”Månen är en ost”
$r =$ ”2 + 2 = 4”
$s =$ ”Getter kan flyga”
$t =$ ”Getter har fyra ben”

Vi går igenom olika varianter på konjunktioner mellan dessa utsagor.

Konjunktionen mellan den falska utsagan $p =$ ”Jag är en fisk” och den falska utsagan $q =$ ”Månen är en ost” blir $p \wedge q =$ ”Månen är en ost och jag är en fisk.” Detta är en utsaga som vi uppfattar som falsk. Konjunktionen mellan två falska utsagor ger alltid en falsk utsaga som resultat.

Konjunktionen mellan den falska utsagan $p =$ ”Jag är en fisk” och den sanna utsagan $r =$ ”$2 + 2 = 4$” är $p \wedge r =$ ”Jag är en fisk och $2 + 2 = 4$”. Detta är en utsaga som vi *också* uppfattar som *falsk*. Visserligen är $2+2=4$ men att hävda att *både* ”$2+2=4$” och ”Jag är en fisk” resulterar i en falsk utsaga. En konjunktion mellan en falsk och en sann utsaga ger alltid en falsk utsaga som resultat.

Konjunktionen mellan de två sanna utsagorna $r =$ ”$2 + 2 = 4$” och $t =$ ”Getter har fyra ben” är $r \wedge t =$ ”$2 + 2 = 4$ och getter har fyra ben”. Detta är en utsaga som vi uppfattar som *sann*. Konjunktionen av två sanna utsagor ger alltid en sann utsaga.

Vi kan sammanfatta ovanstående exempel i en så kallad *sanningstabell* (tabell 1) som gäller för alla utsagor p och q. Sanningstabellen beskriver hur konjunktionen fungerar allmänt.

Table 1. Sanningstabell för konjunktionen

p	q	$p \wedge q$
Sann	Sann	Sann
Sann	Falsk	Falsk
Falsk	Sann	Falsk
Falsk	Falsk	Falsk

Samtliga olika möjliga kombinationer av tilldelningar av sanningsvärden hos p och q undersöks i tabellen. Eftersom vi har två utsagor finns det 4 möjligheter av kombinationer av tilldelningar av sanningsvärden till p och q och därför finns det 4 rader i denna sanningstabell.

Övning på konjunktionen

1.2.1. Fyra av meningarna i övning 1.1.1 är utsagor. Kalla dessa utsagor u_1 , u_2 , u_3 och u_4. Formulera konjunktionerna mellan varje par av utsagor ($u_1 \wedge u_2$, $u_1 \wedge u_3$ och så vidare.) Ange också om de är sanna eller falska.

3. Disjunktion

Disjunktionen är den utsaga som är sann då någon eller bådadera av de båda ingående utsagorna är sanna. Vi formulerar det ordentligt i en definition:

Definition 1.3: Låt p och q vara två givna utsagor. Med *disjunktionen av* p *och* q menas då den utsaga som är sann precis då *någon eller bådadera* av p och q är sanna. Vi skriver disjunktionen av p och q med $p \vee q$. Detta utläses ”p *eller* q” eller ”disjunktionen av p och q”.

Vi går till det tidigare exemplet igen och studerar vi hur sanningsvärdet i en disjunktion påverkas av sanningsvärdena hos de ingående utsagorna.

Disjunktionen mellan den falska utsagan $p =$ ”Jag är en fisk” och den falska utsagan $q =$ ”Månen är en ost” blir $p \vee q =$ ”Månen är en ost eller jag är en fisk.” Detta är en utsaga som vi uppfattar som *falsk*. Disjunktionen mellan två falska utsagor ger alltid en *falsk* utsaga som resultat.

Disjunktionen mellan den falska utsagan $p =$ ”Jag är en fisk” och den sanna utsagan $r =$ ”$2 + 2 = 4$” är $p \vee r =$ ”Jag är en fisk eller $2 + 2 = 4$”. Detta är en utsaga som vi uppfattar som *sann*. Visserligen är jag inte en fisk, men att $2 + 2 = 4$ är sant, det vet vi. Vad vi hävdar i $p \vee r$ är att *åtminstone* en av p och r är sann och det är alltså fallet här (r är ju sann). En disjunktion mellan en falsk och en sann utsaga ger alltid en *sann* utsaga som resultat.

Disjunktionen mellan de två sanna utsagorna $r =$ ”$2 + 2 = 4$” och $t =$ ”Getter har fyra ben” är $r \vee t =$ ”$2 + 2 = 4$ eller getter har fyra ben” som är en utsaga som vi uppfattar som sann. Disjunktionen av två sanna utsagor ger alltid en *sann* utsaga.

Och motsvarande sanningstabell som beskriver hur disjunktionen fungerar allmänt ges i tabell 2.

Table 2. Sanningstabell för disjunktionen

p	q	$p \vee q$
Sann	Sann	Sann
Sann	Falsk	Sann
Falsk	Sann	Sann
Falsk	Falsk	Falsk

Övning på disjunktionen

1.3.1. Gör om övning 1.2.1, men bilda nu istället disjunktionerna mellan varje par av utsagor bland utsagorna u_1, u_2, u_3 och u_4.

4. Negation

Disjunktioner och konjunktioner är operationer som involverar två utsagor och båda dessa operationer ger en ny utsaga. Det finns emellertid en annan operation som bara involverar en enda utsaga: Vi kan ta en utsaga och vända på dess sanningsvärde och därmed få en ny utsaga. Att göra detta brukar i matematiska sammanhang kallas för att ”negera”, eller ”invertera”, precis som när vi multiplicerar ett tal med -1 eller inverterar en matris. Vi tar en definition:

Definition 1.4: Låt p vara en given utsaga. Med *negationen* av p menas då den utsaga som har motsatt sanningsvärde mot p. Vi skriver negationen med $\neg p$ och detta uttalas ”*icke* p” eller ”*negationen av* p”.

Vi ger sanningstabellen direkt i tabell 3.

Vi kan studera negationerna av några av utsagorna som vi arbetat med tidigare. Lägg märke till hur sanningsvärdet skiftas från sann till falsk och tvärtom.

Table 3. Sanningstabell för negationen

p	$\neg p$
Sann	Falsk
Falsk	Sann

Om vi negerar $p =$ ”Jag är en fisk” (Falsk) så får vi $\neg p =$ ”Jag är inte en fisk” (Sann).

Om vi negerar $q =$ ”Månen är en ost” (Falsk) så får vi $\neg q =$ ”Månen är inte en ost” (Sann).

Om vi negerar $r =$ ”$2 + 2 = 4$” (Sann) så får vi $\neg r =$ ”$2 + 2 \neq 4$” (Falsk).

Övning på negationen

1.4.1. Gör om övning 1.2.1, men bilda nu negationerna av utsagorna u_1, u_2, u_3 och u_4.

5. Implikation

Disjunktion, konjunktion och negation kan tolkas som operationer på utsagor. Vi har p och q som är två utsagor och kan bilda de nya utsagorna $p \wedge q$, $p \vee q$ och $\neg p$ samt $\neg q$. Som vi sett i sanningstabeller är dessa utsagor *andra* utsagor än p och q eftersom deras sanningsvärden inte överensstämmer i den meningen att de har exakt samma kolumner i sina respektive sanningstabeller. Till exempel ser vi i tabell 1 att kolumnen för p är ”Sann, Sann, Falsk, Falsk” medan kolumnen för $p \wedge q$ är ”Sann, Falsk, Falsk, Falsk”.

Vi ska nu införa ytterligare en operation mellan två utsagor som dels förstås är en operation men som också kan ges en annan tolkning: ett orsakssammanhang. Den kallas *implikationen* och vi inför den via en definition där vi formulerar oss i termer av orsakssammanhang:

Definition 1.5: Låt p och q vara två givna utsagor. Med *implikationen* $p \rightarrow q$, menas då den utsaga som är sann precis då q följer av p. Implikationen, $p \rightarrow q$, utläses ”*p medför q*” eller ”q följer av p” eller ”*implikationen p medför q*”. Utsagan p kallas implikationens *förled* och q kallas implikationens *efterled.*

Vi ska spendera en del tid med att tolka den här definitionen. Vad menas med att ”q följer av p”? Med implikation vill vi uttrycka ett *orsakssammanhang.* Implikationen $p \rightarrow q$ är sann om följande gäller: q är sann *närhelst* p är sann. Om vi sätter upp en sanningstabell för att uttrycka detta får vi tabell 4.

Table 4. Sanningstabell för implikationen

p	q	$p \rightarrow q$
Sann	Sann	Sann
Sann	Falsk	Falsk
Falsk	Sann	Sann
Falsk	Falsk	Sann

Vi ska analysera varje rad i denna tabell.

Första raden. Här är p sann, q är sann och också $p \rightarrow q$ är sann. Det är då naturligt att låta $p \rightarrow q$ bli sann eftersom både p och q är sanna. Då är det ju uppfyllt att ”q är sann närhelst p är sann.

Andra raden. Här är p sann, q är falsk och $p \rightarrow q$ är falsk. Här ges implikationen $p \rightarrow q$ värdet falsk eftersom p är sann, men *trots det är inte q sann.* Då är det inte uppfyllt att ”q är sann *närhelst* p är sann och därför ges alltså implikationen $p \rightarrow q$ värdet falsk på den här raden.

Exempel: En affär hävdar följande: ”Om du handlar för mer än 1000 kronor får du 5% rabatt”. Här kan man säga att affären hävdar att en implikation är sann. Förledet i implikationen blir $p =$ ”Du handlar för mer än 1000 kronor”. Efterledet blir $q =$ ”Du får 5% rabatt”. Det affären hävdar är alltså att $p \rightarrow q$ är Sann. Antag att du då är kund i affären och verkligen handlar för mer än 1000 kronor. Om du då av någon anledning *inte* får de utlovade 5%:en i rabatt så skulle man kunna hävda att affären ljuger. Implikationen $p \rightarrow q$ är således falsk eftersom det faktum att förledet (p) var sant *inte* gav att efterledet (q) också blev sant.

Tredje och fjärde raden. På både tredje och fjärde raden i sanningstabellen väljer vi att tilldela implikationen $p \to q$ värdet sann. Detta är för att p på dessa två rader har värdet falsk. Oavsett vilket värde q då antar, sann eller falsk, så väljer vi att tilldela implikationen $p \to q$ värdet sann. För att lättare förstå varför vi gör på detta sätt kan vi komma ihåg att implikationen $p \to q$ inte befattar sig med vare sig ps eller qs sanningsvärden. Utsagan $p \to q$ yttrar sig bara om ett orsakssammanhang. Det implikationen säger är att om p är sann så ska q vara sann. Vi säger ingenting direkt om hur det ska vara då p är falsk. Eftersom en utsaga måste vara sann eller falsk får vi då bestämma oss för ett sanningsvärde hos $p \to q$ också då p är falsk. Det visar sig att det passar logiskt bäst om vi tilldelar $p \to q$ värdet sann närhelst förledet p är falskt. Vi kommer att förstå detta bättre i de följande avsnitten när vi sätter ihop begreppen som vi nu stegvis inför. Om du tycker att rad 3 och 4 i sanningstabellen är konstiga så låt det bara vara ett tag, så kommer det att klarna snart.

Övning på implikationen

1.5.1. Gör återigen om övning 1.2.1, men bilda nu implikationerna mellan varje par av utsagor bland utsagorna u_1, u_2, u_3 och u_4.

Dessa implikationer kan komma att se lite löjliga ut och du får förstås göra så mycket som känns meningsfullt – det kommer mer meningsfulla övningar senare!

6. Ekvivalens

Ekvivalens är ett ord bildat av två ord *ekvi* som betyder "lika" och *valens* som betyder "värde". Ekvivalens betyder alltså likvärdig och två utsagor är ekvivalenta om de har samma sanningsvärden. Vi ger en definition.

Definition 1.6: Låt p och q vara två givna utsagor. Med *ekvivalensen* $p \leftrightarrow q$, menas då den utsaga som är sann precis då p och q har exakt samma sanningsvärden. Ekvivalensen, $p \leftrightarrow q$, utläses "*p är ekvivalent med q*" eller "*Ekvivalensen p och q*" eller "*p ekvivalent med q*".

Vi ger en sanningstabell direkt i tabell 5.

Table 5. Sanningstabell för ekvivalensen

p	q	$p \leftrightarrow q$
Sann	Sann	Sann
Sann	Falsk	Falsk
Falsk	Sann	Falsk
Falsk	Falsk	Sann

Av tabell 5 framgår att $p \leftrightarrow q$ är sann precis då p och q har exakt samma sanningsvärde: Så fort sanningsvärdet av p och q skiljer sig åt (som är fallet på rad 2 och 3) får $p \leftrightarrow q$ värdet falsk och på de rader där sanningsvärdena av p och q överensstämmer (som är fallet på rad 1 och rad 4) så tilldelas $p \leftrightarrow q$ värdet sann.

Övning på ekvivalensen

1.6.1. Gör återigen om övning 1.2.1, men bilda nu ekvivalenserna mellan varje par av utsagor bland utsagorna u_1, u_2, u_3 och u_4. Hur många ekvivalenser blir det jämfört med antalet implikationer i förra övningen?

7. Att kombinera flera konnektiv i samma utsaga

Alla operationer som vi studerat hittills, disjunktion, konjunktion, implikation och ekvivalens kallas med andra ord för *logiska konnektiv* eller bara *konnektiv.* Vi har hittills infört fem konnektiv: konjunktion, disjunktion, negation, implikation och ekvivalens. Etymologin för ordet "konnektiv" förefaller vara ganska uppenbar, det engelska ordet *connect* betyder ju att *förbinda* och ett konnektiv kan förbinda två utsagor. Undantaget är negationen som ju inte förbinder två utsagor utan opererar på endast en utsaga. Negationen kallas ändå för ett konnektiv.

När vi nu har flera konnektiv som kan operera på utsagor och skapa nya utsagor så uppkommer möjligheten att kombinera flera olika konnektiv i samma utsaga. Vi behöver då vara noggranna så att vi inte skapar tvetydigheter. Vi kan illustrera detta genom att betrakta en mening skriven på naturligt språk:

Jag är förkyld och korkad eller trött.

Om vi inte är noggranna så skulle vi till exempel kunna skriva så här:

$$p \wedge q \vee r$$

och tro att det skulle kunna vara en formalisering av ovanstående mening där vi har de tre utsagorna $p =$ ”Jag är förkyld”, $q =$ ”Jag är korkad” och $r =$ ”Jag är trött”.

Här uppstår problemet med tvetydighet. Problemet kommer från det naturliga språket för om jag säger *Jag är förkyld och korkad eller trött* så kan det tolkas på två sätt där den första tolkningen är att jag egentligen menar

Jag är förkyld. Men dessutom är jag också korkad eller trött

och den här utsagan skulle få den satslogiska formaliseringen

$$p \wedge (q \vee r).$$

Den andra tolkningen skulle kunna formuleras så här:

Jag är förkyld och korkad. Eller så är jag trött.

Och den här meningen få då den satslogiska formaliseringen

$$(p \wedge q) \vee r.$$

Rent satslogiskt *måste* vi alltså införa parenteser då vi tecknar utsagor som innehåller konnektiven $\wedge$ och $\vee$. Det här skiljer sig från situationen med till exempel multiplikation och addition. Om vi skriver $4 \cdot 5 + 13$ så är det bestämt att vi menar att multiplikationen ska utföras först. Så när vi beräknar värdet av uttrycket $4 \cdot 5 + 13$ så blir det $20 + 13$ som är 33. Om vi skulle vilja utföra additionen först så måste vi införa parenteser och skriva $4 \cdot (5 + 13)$ och nu får uttrycket istället värdet $4 \cdot 18$ som är 72.

För att ytterligare klargöra detta kan vi studera de satslogiska uttrycken $p \wedge (q \vee r)$ och $(p \wedge q) \vee r$ i en sanningstabell. I tabell 6 förekommer kolumnerna för de uttrycken längst till höger och vi ser klart och tydligt att de inte är ekvivalenta eftersom de har olika kolumner av sanningsvärden. Vi har i tabellen fetmarkerat de sanningsvärden som skiljer sig åt.

Table 6. Sanningstabell för uttrycken $p \wedge (q \vee r)$ och $(p \wedge q) \vee r$

p	q	r	$p \wedge q$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee r$
Sann	Sann	Sann	Sann	Sann	Sann	Sann
Sann	Sann	Falsk	Sann	Sann	Sann	Sann
Sann	Falsk	Sann	Falsk	Sann	Sann	Sann
Sann	Falsk	Falsk	Falsk	Falsk	Falsk	Falsk
Falsk	Sann	Sann	Falsk	Sann	**Falsk**	**Sann**
Falsk	Sann	Falsk	Falsk	Sann	Falsk	Falsk
Falsk	Falsk	Sann	Falsk	Sann	**Falsk**	**Sann**
Falsk	Falsk	Falsk	Falsk	Falsk	Falsk	Falsk

Det heltäckande begreppet som rätar ut alla frågetecken i sammanhanget kallas *precedens.* En synonym till detta ord är *företräde.* Olika operatorer har olika hög precedens och ju högre precendens en operator har, desto tidigare ska dess verkan beräknas – den har då företräde framför andra operationer.

Då det gäller vanliga tal så har vi ett antal operatorer med olika precedens: unärt minus (alltså multiplikation med -1 (högst precedens), multiplikation (näst högst precedens) och slutligen addition (lägst precedens). Ett annat bra ord som beskriver vad det är frågan om här är *prioritet.* Om vi till exempel vill beräkna uttrycket $3 \cdot 4 - 5 \cdot (3 + 2)$ så gör vi så här. Den operator som har högst precedens är unärt minus och vi beräknar alltså den först. Uttrycket får då formen

$$3 \cdot 4 + (-5) \cdot (3 + 2).$$

Normalt sett tänker vi kanske inte på ”unärt minus”, vi ser istället minustecknet och tänker ”subtraktion”, men subtraktion är ju ingenting annat än att vi adderar -1 multiplicerat med någonting. Näst på tur är multiplikation och då ser vi att vi ska utföra $3 \cdot 4$ så uttrycket får formen

$$12 + (-5) \cdot (3 + 2).$$

I nästa steg så ser vi att vi har infört parenteser, det innebär att precedensordningen ska upphävas och additionen mellan 3 och 2 (som står innanför parenteserna) ska ges högre prioritet (precedens) än multiplikationen som står utanför parenteserna. Det betyder alltså att additionen av 3 och 2 utförs i nsta steg som alltså ger oss uttrycket

$$12 + (-5) \cdot 5$$

och nu utför vi multiplikationen $(-5) \cdot 5$ som ger att uttrycket får den nästan slutliga formen $12 + (-25)$ och efter den sista additionen utförts får vi slutresultatet -13. (Den sista additionen skulle också kunna tolkas som subtraktionen $12 - 25$.)

I tabell 7 anges alla precedenser för de vanliga operatorerna på vanliga tal, unärt minus, multiplikation och addition.

Table 7. Precedenser för aritmetiska operationer

Operator	Namn	Antal operander	Effekt	Exempel	Precedens
$-$	Unärt minus	1	Byter tecken på operanden	$-(5) = -5$	Högst
$\cdot$	Multiplikation	2	Bildar produkten av operanderna	$3 \cdot 4 = 12$	Näst högst
$+$	Addition	2	Bildar summan av operanderna	$3 + 4 = 7$	Lägst

Det kan kanske kännas lite förvirrande med unärt minus, men vi kommer att se att det är lämpligt att betona den operatorn eftersom den har viktiga motsvarigheter i logiken (i form av negationen) men även i mängdläran (i form av den så kallade *komplementmängden*).

I tabell 8 ser vi motsvarande översikt av över precedenserna för logiska konnektiv.

Table 8. Precedenser för logiska konnektiv

Operator	Namn	Antal operander
$\neg$	Negation	1
$\wedge, \vee$	Konjunktion och disjunktion	2
$\rightarrow, \leftrightarrow$	Implikation och ekvivalens	2

Av utrymmesskäl kan inte tabell 8 blir så omfattande som tabell 7 men tabellerna är uppbyggda på samma sätt: ju högre precedens, desto högre upp i tabellen finns operatorn. Väl att märka i tabell 8 är att konjunktion och disjunktion har *samma* precedens och det är anledningen till att vi måste använda parenteser om en utsaga är skapad med både konjunktion och disjunktion. Ett uttryck av typen

$$p \wedge q \vee r$$

är alltså inte ens lagligt i satslogiken, det är *inte ens en utsaga*. För att få en utsaga måste, som vi såg tidigare, parenteser införas så att vi har antingen $(p \wedge q) \vee r$ eller $p \wedge (q \vee r)$.

Vidare ser vi att implikationen och ekvivalensen har lägre precedens så uttryck av typen

$$p \rightarrow q \vee r$$

är lagliga och utsagan ovan är alltså en implikation där förledet är utsagan p och efterledet är utsagan $q \vee r$.

Övningar

1.7.1. Skapa en sanningstabell för de logiska uttrycken $p \wedge q$, $p \wedge \neg q$, $\neg p \wedge q$ och $\neg p \wedge \neg q$. (De kan alla rymmas i samma tabell. Det är bra att addera kolumner för $\neg p$ och $\neg q$ i denna tabell.)

1.7.2. Skapa en sanningstabell för de logiska uttrycken $p \vee q$, $p \vee \neg q$, $\neg p \vee q$ och $\neg p \vee \neg q$. (De kan alla rymmas i samma tabell. Det är bra att addera kolumner för $\neg p$ och $\neg q$ i denna tabell.)

1.7.3. Studera kolumnerna i sanningstabellerna hörande till övningarna 1.7.1 och 1.7.2. Vilka slutsatser kan du dra på basis av inspektion av dessa kolumner?

1.7.4. Skapa en sanningstabell för de logiska uttrycken $p \rightarrow q$, $p \rightarrow \neg q$, $\neg p \rightarrow q$ och $\neg p \rightarrow \neg q$. Studera kolumnerna och jämför dem med kolumnerna i sanningstabellerna hörande till övning 1.7.2. Vilka slutsatser kan du dra?

1.7.5. Skapa en sanningstabell för utsagan $p \rightarrow q \wedge \neg r$.

1.7.6. Skapa en sanningstabell för utsagan $p \wedge (q \rightarrow \neg r \vee s)$.

8. Sanningstabellen som verktyg

Titta tillbaka på tabell 6. Vi använde den för att övertyga oss om att utsagorna $p \wedge (q \vee r)$ och $(p \wedge q) \vee r$ inte var ekvivalenta. Det betyder att tabellen själv var ett instrument med vars hjälp vi kunde säkerställa någonting som sedan gäller generellt. Det vi gjorde då var att skapa någonting som kallas ett *bevis* och det kommer att var en stor del av den här framställningen: studiet av hur vi kan säkerställa allmängiltiga sanningar, eller med ett annat ord *bevisföring*.

Betrakta nu tabell 9. Här har vi sanningstabeller för de fyra utsagorna $p \to q$, $q \to p$, $(p \to q) \wedge (q \to p)$ och $p \leftrightarrow q$.

Table 9. Sanningstabell för $p \to q$ med mera.

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$	$p \leftrightarrow q$
Sann	Sann	Sann	Sann	Sann	Sann
Sann	Falsk	Falsk	Sann	Falsk	Falsk
Falsk	Sann	Sann	Falsk	Falsk	Falsk
Falsk	Falsk	Sann	Sann	Sann	Sann

Som tredje kolumn i tabell 9 ser vi implikationens sanningsvärden, ”Sann, Falsk, Sann, Sann”. Vi hade tidigare en kommentar om att de två sista sanningsvärdena på rad 3 och 4 kanske var lite märkliga, varför ska implikationens sanningsvärde antas vara sann då förledet (p) är falsk?

Men i denna tabell kan vi se precis varför implikationen har den här strukturen. Vi finner denna klarhet genom att bilda den så kallade *omvändningen* till implikationen $p \to q$, omvändningen är då utsagan $q \to p$, alltså p och q har bytt roller. Dess sanningstabell finner vi i den fjärde kolumnen och sanningsvärdena där är då ”Sann, Sann, Falsk, Sann”. Dessa två kolumner (den tredje och den fjärde) beskriver nu för oss hur implikationerna $p \to q$ och $q \to p$ fungerar. Dessa två kolumner specificerar alltså orsakssammanhang mellan p och q. Antag nu att vi hävdar att både $p \to q$ och $q \to p$ ska vara uppfyllda. Innan vi tittar i sanningstabellen kan vi först reflektera över vad det skulle innebära. Om p skulle medföra q och q skulle medföra p – det skulle innebära att p och q är mycket tätt sammanspunna. Och om vi nu tittar på den femte kolumnen som just studerar $(p \to q) \wedge (q \to p)$ så ser vi att den är exakt samma kolumn som för ekvivalensen $p \leftrightarrow q$. Att ”p och q är mycket tätt sammanspunna” motsvarar alltså precis att de är ekvivalenta. Och här finner vi då förklaringen till varför vi måste ha ”Sann, Falsk, Sann, Sann” i kolumnen för sanningstabellen för implikationen, det är precis den tilldelningen av sanningsvärden som ger oss egenskapen att $(p \to q) \wedge (q \to p)$ och $p \leftrightarrow q$ har samma sanningsvärden. Vi ska senare införa en term för detta: om två utsagor har samma kolumns i en sanningstabell som studerar alla möjliga tilldelningar av sanningsvärden av de ingående delarna av utagorna så kallas de *logiskt ekvivalenta*. (Vi skulle även kunna tagit $(p \to q) \wedge (q \to p)$ som en definition av $p \leftrightarrow q$.)

Vi ska nu bygga sanningstabeller för de logiska uttrycken $\neg p \wedge \neg q$ samt $\neg(p \vee q)$ och se att dessa i själva verket är logiskt ekvivalenta. Betrakta tabell 10.

Table 10. Sanningstabell för $\neg p \wedge \neg q$ och $\neg(p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q)$
Sann	Sann	Sann	Falsk	Falsk	Falsk	Falsk
Sann	Falsk	Sann	Falsk	Sann	Falsk	Falsk
Falsk	Sann	Sann	Sann	Falsk	Falsk	Falsk
Falsk	Falsk	Falsk	Sann	Sann	Sann	Sann

Tabell 10 illustrerar hur vi skapar en sanningstabell för större komplicerade uttryck formerade med logiska konnektiv. Tabellen skapas i steg. Först anges de två första kolumnerna med alla möjliga kombinationer av tilldelningar av sanningsvärden till utsagorna p och q. Det finns 4 sådana möjligheter och det innebär att hela tabellen får 4 rader. Vi väljer sedan att skapa en kolumn där vi anger sanningsvärdena för disjunktionen $p \vee q$. Detta är inget annat än tabell 2 upprepad som en del av tabell 10. Sedan bildar vi kolumner där vi studerar sanningsvärdena hos $\neg p$ respektive $\neg q$. Dessas sanningsvärden är förstås framtagna helt i analogi med tabell 3. Nu har vi flera komponenter och vi kan fortsätta studera sanningsvärdet av de mer komplicerade uttrycken $\neg p \wedge \neg q$ och $\neg(p \vee q)$. Det första uttrycket, $\neg p \wedge \neg q$, är en konjunktion mellan $\neg p$ och $\neg q$. En konjunktion är sann precis då båda ingående utsagor är sanna. Detta inträffar endast på 4:e raden varför $\neg p \wedge \neg q$ tilldelas värdet sann på 4:e raden och värdet falsk på samtliga andra rader. Den sista kolumnen anger sanningsvärden för $\neg(p \vee q)$ som är negationen av uttrycket som studeras i tredje kolumnen. För att få sista kolumnen behöver vi därför bara negera sanningsvärdena från tredje kolumnen och det ger oss värdet sann på sista raden och värdet falsk på de andra raderna. Betrakta nu de två sista kolumnerna i tabell 10. De är identiska! Båda lyder ”Falsk, Falsk, Falsk, Sann”. Eftersom tabell 10 är en sanningstabell som undersöker sanningsvärdena för uttrycken $\neg p \wedge \neg q$ och $\neg(p \vee q)$ för alla möjliga tilldelningar av sanningsvärden till p och q och dessa uttryck har identiska kolumner så måste alltså dessa två utsagor alltid ha samma sanningsvärde, det vill säga de måste vara ekvivalenta. Av tabell 10 kan vi alltså dra slutsatsen $(\neg p \wedge \neg q) \leftrightarrow \neg(p \vee q)$ och detta utgör alltså ett bevis för denna allmängiltiga lag (det är en variant av *DeMorgans lag*).

Övningar saknas på detta avsnitt

Övningarna i föregående avsnitt där du frågades efter vilka slutsatser du kunde dra på basis av sanningstabellernas utseende är egentligen mer tillhörande detta avsnitt, så det kan vara bra att gå tillbaka till de övningarna nu när du läst detta avsnitt.

9. Logiska härledningsregler

Problemställningar inom logik formuleras ofta genom att vi anger ett antal förutsättningar och ställer oss frågan ”vilken slutsats kan dras av dessa förutsättningar?” Ett annat ord för ”förutsättning” som vi kommer att använda är *premiss.*

Ett annat ord som ligger mellan orden ”slutsats” och ”problemställning” är ”slutledning” och en problemställning inom logik där frågan ställs ”vilken slutsats kan dras?” formuleras ofta med orden ”Är följande slutledning korrekt”. Sedan anges premisserna och den påstådda slutsatsen. Vi tar ett exempel.

Exempel: Är följande slutledning korrekt?

$$\begin{array}{ll} 1. & p \vee q \\ 2. & \neg q \\ \hline \therefore & p \end{array}$$

Här anges först premisserna som är två utsagor, $p \vee q$ och $\neg q$, numrerade med 1 och 2. Sen dras ett streck och under strecket skrivs symbolen $\therefore$ som betyder slutsats. Efter slutsatstecknet anges vad den påstådda slutsatsen är och i exemplet är den alltså p.

Med den här notationen anger vi alltså situationen då vi har givet att de två utsagorna $p \vee q$ och $\neg q$ är sanna och vi frågar oss då om vi kan dra slutsatsen p. Det kommer att visa sig att vi kan dra slutsatsen p från de två givna premisserna men det kommer också att visa sig att det här är en så vanligt förekommande situation av premisser att vi vill ge den här slutledningen ett allmänt namn. Vi kommer då att kalla det här för en *slutledningsregel* och den kommer att ha det lite märkvärdiga namnet *Disjunktiv Syllogism.*

Ordet *syllogism* betyder ”härledningsregel som involverar två utsagor” och kommer från grekiskan och de gamla grekerna (med Aristoteles i spetsen) var mycket tidiga med att formalisera logiskt tänkande, och den logik som ligger som grund för modern vetenskap (och därmed ingenjörskonsten) kommer därifrån.

I de följande delavsnitten ska vi studera *Disjunktiv Syllogism* men även andra härledningsregler och motivera deras giltighet dels genom så kallat ”sunt förnuft” men också med mer formella resonemang med sanningstabeller.

9.1. Disjunktiv Syllogism.

För alla utsagor p, q är följande slutledning alltid korrekt:

$$\begin{array}{ll} 1. & p \vee q \\ 2. & \neg q \\ \hline \therefore & p \end{array}$$

Vi ska först övertyga oss om att slutledningen är korrekt genom att bara resonera kring vad det hela betyder.

Den första premissen säger att p eller q har värdet sann. Den andra premissen säger att q inte är sann. Vad kan vi dra för slutsats om p? Något som vi i dagligt tal brukar kalla ”uteslutningsprincipen” säger oss att p måste vara sann. Varför det? Jo, premiss 1 säger att någon av p och q måste vara sann. Premiss 2 säger att det inte är q. Då är det bara p kvar som således måste vara sann.

En annan benämning på *Disjunktiv Syllogism* skulle alltså kunna vara ”uteslutningsprincipen” och resonemanget ovan är en fullgod motivering till varför slutledningen alltid är korrekt. Vi ska emellertid även använda sanningstabeller för att motivera härledningsregler. Det kommer också att vara en generall metod med vilken vi teoretiskt sett kan undersöka vilka slutledningar som helst.

I tabell 11 har vi skapat en speciell sanningstabell för att motivera *Disjunktiv Syllogism*.

Table 11. Sanningstabell för *Disjunktiv Syllogism* (Uteslutningsprincipen).

p	q	$\neg q$	$p \vee q$	Uppfyllda premisser
Sann	Sann	Falsk	Sann	1
Sann	Falsk	Sann	Sann	1, 2
Falsk	Sann	Falsk	Sann	1
Falsk	Falsk	Sann	Falsk	2

Vi har adderat en 5:e kolumn där vi indikerar var var och en av premisserna är uppfyllda. Kolumnen rubriceras helt enkelt ”Uppfyllda premisser”. Betrakta nu den första premissen, 1. $p \vee q$. Den är uppfylld på första, andra och tredje raden. Vi har indikerat att första premissen är sann genom att skriva 1:or i kolumnen för ”Uppfyllda premisser” på dessa rader. Vi har gjort likadant med andra premissen, (alltså 2. $\neg q$) som är uppfylld på andra och fjärde raden varför vi har 2:or på dessa rader i kolumnen för ”Uppfyllda premisser”. På de rader där *båda* premisserna är uppfyllda finner vi den information om vilka slutsatser som kan dras om ps och qs sanningsvärden. Det är bara en rad där *båda* premisserna är uppfyllda och här är den andra raden. På denna rad avläser vi att p har värdet sann och det blir således vår slutsats. (Vi har fetmarkerat värdet **Sann** i ps kolumn längst till vänster där vi avläste ps sanningsvärde.)

9.2. Modus Ponens.

En av de allra enklaste (och viktigaste!) härledningsreglerna kallas *Modus Ponens* och den lyder så här:

$$\begin{array}{ll} 1. & p \to q \\ 2. & p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Alltså om q följer av p och vi vet att p är sann, ja då kan vi dra slutsatsen att q är sann. Detta är något som vi uppfattar som självklart. Vi ska emellertid bevisa denna härledningsregel med hjälp av en sanningstabell.

Table 12. Sanningstabell för *Modus Ponens*.

p	q	$p \to q$	Uppfyllda premisser
Sann	**Sann**	Sann	1, 2
Sann	Falsk	Falsk	2
Falsk	Sann	Sann	1
Falsk	Falsk	Sann	1

I tabell 12 studerar vi hur sanningsvärdena hörande till premisserna 1. $p \to q$ och 2. p samverkar till att ge oss den slutsats vi hävdar är sann. Vi noterar som förut i kolumnen ”Uppfyllda premisser” att implikationen, som är vår första premiss, är sann på första, tredje och fjärde raden. Vi noterar i samma kolumn de rader där den andra premissen är uppfylld vilken är p som har värdet sann på första och andra raden. De rader där *båda* premisserna har värdet sann är den första raden. Vi går in och ser att q på denna rad är sann vilket innebär att vi visat att premisserna ger att q blir sann. Som ovan har vi i qs kolumn fetmarkerat det aktuella sanningsvärdet (som är **Sann**).

9.3. Modus Tollens.

En annan enkel och *mycket* kraftfull härledningsregel kallas *Modus Tollens* och den lyder så här:

$$\begin{array}{ll} 1. & p \to q \\ 2. & \neg q \\ \hline \therefore & \neg p \end{array}$$

Och ett allmännt resonemang som motiverar denna regel kan lyda så här: Om q följer av p och vi vet att q är falsk, ja då kan inte p vara sann, för om p hade varit sann så kunde inte q vara falsk. Det är en fullständigt godtagbar motivation och kan uppfattas som ett bra bevis för att *Modus Tollens* håller. Men vi skapar ändå en sanningstabell som kan användas för att övertyga oss om att denna regel håller. Sanningstabellen är given i tabell 13.

TABLE 13. Sanningstabell för *Modus Tollens*.

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$	Uppfyllda premisser
Sann	Sann	Sann	Falsk	Falsk	1
Sann	Falsk	Falsk	Sann	Falsk	2
Falsk	Sann	Sann	Falsk	Sann	1
Falsk	Falsk	Sann	Sann	**Sann**	1, 2

I tabell 13 ser vi hur $\neg p$ är sann då båda premisserna är uppfyllda vilket endast sker på sista raden. Vi har här återigen fetmarkerat det sanningsvärde som låter oss dra den slutsats som krävs.

9.4. Hypotetisk Syllogism.

En lite mer komplicerad härledningsregel kallas *Hypotetisk Syllogism* och den lyder så här:

$$\begin{array}{ll} 1. & p \to q \\ 2. & q \to r \\ \hline \therefore & p \to r \end{array}$$

Vad regeln säger är att om q följer av p och r i sin tur följer av q så måste r följa av p. Premiss 1 säger att p ger q. Premiss 2 säger att q i sin tur ger r. Vår slutsats blir att p ger r *via* q. Vi kan så att säga koppla ihop implikationerna.

I ovanstående text så svävar vi lite på målet, vadå "*via q*", vadå "koppla ihop"? Här är det lite svårare att acceptera bara vanliga ord som en formell motivering för slutledningsregelns giltighet. Om vi vill vara fullständigt noggranna så vill vi ha en säkrare formulering, så vi skapar ett bevis med hjälp av en sanningstabell. Den ges i tabell 14.

TABLE 14. Sanningstabell för *Hypotetisk Syllogism*.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$	Uppfyllda premisser
Sann	Sann	Sann	Sann	Sann	**Sann**	1, 2
Sann	Sann	Falsk	Sann	Falsk	Falsk	1
Sann	Falsk	Sann	Falsk	Sann	Sann	2
Sann	Falsk	Falsk	Falsk	Sann	Falsk	2
Falsk	Sann	Sann	Sann	Sann	**Sann**	1, 2
Falsk	Sann	Falsk	Sann	Falsk	Sann	1
Falsk	Falsk	Sann	Sann	Sann	**Sann**	1, 2
Falsk	Falsk	Falsk	Sann	Sann	**Sann**	1, 2

I tabell 14 ser vi en förteckning över samtliga sanningsvärden hörande till premisserna i hypotetisk syllogism men även den slutsats som vi hävdar ska följa finns med i tabellen (alltså $p \to r$). Den första premissen, $p \to q$, är sann på 6 rader, första, andra, femte, sjätte, sjunde och åttonde raden. Den andra premissen, $q \to r$, är sann på 6 rader, första, tredje, fjärde, femte, sjunde och åttonde. På fyra av alla åtta raderna är *båda* premisserna sanna. Det är här som vi hävdar att vår slutsats också är sann. Det gäller första, femte, sjunde och åttonde raden och vi ser att det som vi hävdar är vår slutsats, nämligen $p \to r$, också *verkligen har* värdet sann på dessa fyra rader. Detta resonemang motiverar härledningsregeln.

Vi observerar att i det sista beviset behövde vi betrakta *flera* rader där samtliga premisser var uppfyllda. Och det är mycket viktigt att sanningsvärdet verkligen är sann på alla rader där alla premisser är uppfyllda annars skulle slutledningen inte vara riktig. (Som förut har vi fetmarkerat de sanningsvärden som möjliggör slutsatsen.)

9.5. Sammanställning av alla härledningsregler.

Ovan har vi visat fyra härledningsregler. Det finns en till som kallas *Dilemma* och så och vi ger den tillsammans med de andra i en sammanställning av allihop:

Modus Ponens	*Modus Tollens*	*Disjunktiv Syllogism*	*Hypotetisk Syllogism*	*Dilemma*
1. $p \to q$	1. $p \to q$	1. $p \lor q$	1. $p \to q$	1. $p \lor q$
2. p	2. $\neg q$	2. $\neg q$	2. $q \to r$	2. $p \to r$
$\therefore$ q	$\therefore$ $\neg p$	$\therefore$ p	$\therefore$ $p \to r$	3. $q \to r$
				$\therefore$ r

Vi kommer inte att visa *Dilemma*, den lämnas som en övning till läsaren.

Övningar till detta avsnitt kommer efter nästa avsnitt

10. Logisk ekvivalens och implikation

I matematiken och logiken för vi ofta resonemang i *led* där leden utgörs av utsagor och resonemang involverar att ta sig från ett visst led till ett annat, det vill säga vi vill etablera att ett visst led (eller samling av led) *implicerar* andra led och att detta så småningom leder fram till en slutsats. Detta modelleras av föregående avsnitt där premisserna kan sägas vara led som kan ge en slutsats eller inte. Vi skulle alltså kunna säga att *Disjunktiv Syllogism* kan formuleras allmänt på följande sätt:

Disjunktiv Syllogism: För alla utsagor, p, q, gäller:

$$((p \lor q) \land \neg q) \to p.$$

Här används alltså implikationspilen ($\to$) för att uttrycka att slutsatsen $\neg p$ följer av premisserna. (Och premisserna anges av konjunktionen i implikationens förled.)

Vi skulle kunna leva med denna stora mängd av parenteser, men betrakta nu hur *Hypotetisk Syllogism* skulle formuleras:

Hypotetisk Syllogism: För alla utsagor p, q, r gäller

$$((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r).$$

Återigen, vi skulle kunna leva med denna mängd parenteser, men här inträder ytterligare en källa till förvirring. Vi har *fyra* implikationspilar i den här utsagan. Med parenteserna klargörs en precedens mellan dessa implikationer så att en av pilarna (den tredje) betecknar slutsatsen och den fjärde är del av slutsatsens *formulering.* (De första två implikationspilarna är delar av premissernas formuleringar.) Här önskar vi ett bättre skrivsätt och då inför vi någonting som kallas *logisk implikation.* Vi betecknar logisk implikation med en dubbelstreckad pil som då har samma betydelse som den enkelstreckade pilen plus parenteser. Då kan vi skriva *Hypotetisk Syllogism* respektive *Disjunktiv Syllogism* ovan som

$$(p \to q) \land (q \to r) \Rightarrow p \to r \qquad \text{respektive} \qquad (p \lor q) \land \neg q \Rightarrow p.$$

När vi använder den dubbelstreckade pilen slipper vi alltså skriva ut så många parenteser. Vi kan definiera detta formellt genom att säga att med

$$P \Rightarrow Q,$$

där P och Q är satslogiska uttryck, menar vi att sanningstabellen för $(P) \to (Q)$ bara har sanningsvärdet sann på alla rader. I tabell 15 ger vi en sanningstabellen för $((p \lor q) \land \neg q) \to p$ och här ser vi att alla sanningsvärdena är sann på alla rader (i den aktuella kolumnen).

Table 15. Sanningstabell som visar att $((p \lor q) \land \neg q) \to p$ alltid är sant.

p	q	$p \lor q$	$\neg q$	$(p \lor q) \land \neg q$	$((p \lor q) \land \neg q) \to p$
Sann	Sann	Sann	Falsk	Falsk	Sann
Sann	Falsk	Sann	Sann	Sann	Sann
Falsk	Sann	Sann	Falsk	Falsk	Sann
Falsk	Falsk	Falsk	Sann	Falsk	Sann

I vissa framställningar av logiken införs termen *tautologi* för en utsaga som alltid är sann under alla förhållanden. Vi skulle därför kunnat definera logisk implikation (alltså den dubbelstreckade pilen) genom att säga att *Utsagan P säges logiskt implicera Q om utsagan $(P) \to (Q)$ är en tautologi* men här har vi valt att formulera det hela med sanningstabeller istället.

Precis motsvarande konstruktion kan göras med ekvivalensspilen ($\leftrightarrow$), det vill säga vi säger att utsagorna P och Q är *logiskt ekvivalenta* om sanningstabellen för $(P) \leftrightarrow (Q)$ bara innehåller sanningsvärdena sann på alla rader. Vi skriver då detta med $P \Leftrightarrow Q$.

Vi ger nu en sammanfattning av satslogiska lagar. Vissa har vi redan stött på och sett bevis för, andra är nya. Det är en utmärkt övning för läsaren att motivera dessa med sanningstabeller. Sammanfattningen ges i tabell 16 där p, q och r godtyckliga utsagor.

Table 16. Sammanfattning av satslogiska lagar.

1.	Kommutativa lagarna:	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ samt $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
2.	Associativa lagarna:	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ samt $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
3.	Distributiva lagarna:	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ samt $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
4.	Lagen om dubbel negation:	$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
5.	Idempotens:	$p \wedge p \Leftrightarrow p$ samt $p \vee p \Leftrightarrow p$
6.	DeMorgans lagar:	$\neg p \wedge \neg q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$ samt $\neg p \vee \neg q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$
7.	Absorptionslagarna:	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ samt $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

Alla dessa regler och lagar uttrycker allmänna egenskaper hos konnektiven och logiken som kan användas i strikta logiska resonemang. Styrkan ligger i allmängiltigheten. Det spelar ingen roll vad utsagorna p, q och r utsäger, lagarna är alltid gällande. Allmängiltigheten understryks av att vi använder symbolen för logisk ekvivalens, $\Leftrightarrow$, snarare än den vanliga ekvivalenspilen $\leftrightarrow$.

Då vi relaterar matematiska utsagor med varandra (som vi senare ska göra) använder vi också hellre de dubbelstreckade pilarna när vi vill understryka att något gäller allmänt. Till exempel kan vi skriva

$$x + 3 = 5 \Leftrightarrow x = 5 - 3 \qquad \text{eller} \qquad x > 0 \Rightarrow (1 + x) < (1 + x)^2$$

och även utläsa detta ”$x + 3 = 5$ är ekvivalent med $x = 5 - 3$” respektive ”Om x är positivt så medför det att kvadraten på $(1 + x)$” blir större än $(1 + x)$. I talspråk hoppar vi ofta över ordet ”logiskt” och säger bara ”ekvivalent” istället för ”logiskt ekvivalent” respektive att vi bara använder ordet ”medför” då vi vill uttrycka logisk implikation. Det allmnängiltiga här är att ekvivalensen och implikationen gäller för alla tal x.

Övningar

1.11.1 *före detta 1.8.1.* Baserat på dina observationer hörande till övningarna i avsnittet om sanningstabellen som ett verktyg, formulera ett antal ekvivalenser med dubbelstreckade pilar. (Till exempel bör $p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ vara en av dessa ekvivalenser.)

1.11.2 *före detta 1.8.2.* Gäller $p \to (q \wedge \neg r) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to \neg r)$? Motivera ditt svar med en sanningstabell.

1.11.3 *före detta 1.9.1.* Visa följande lagar med sanningstabeller: (p, q, r är godtyckliga utsagor)

1.	Kommutativa lagarna:	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ samt $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
2.	Associativa lagarna:	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ samt $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
3.	Distributiva lagarna:	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ samt $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
4.	Lagen om dubbel negation:	$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
5.	Idempotens:	$p \wedge p \Leftrightarrow p$ samt $p \vee p \Leftrightarrow p$
6.	DeMorgans lagar:	$\neg p \wedge \neg q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$ samt $\neg p \vee \neg q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$
7.	Absorptionslagarna:	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ samt $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

1.11.4 *före detta 1.9.2.* Visa följande härledningsregler med sanningstabell:

Dilemma: Bevis genom falluppdelning

1.	$p \vee q$
2.	$p \to r$
3.	$q \to r$
$\therefore$	r

Dilemma: en annan variant

1.	$p \vee q$
2.	$p \to r$
3.	$q \to s$
$\therefore$	$r \vee s$

1.11.5 *före detta 1.9.3.* Formulera en annan regel liknande den i föregående övning som du kallar *Trilemma* och som har ett liknande utseende som regeln fr *Dilemma* men som baserar sig p tre utsagor p, q och r istället. Skapa ett bevis med en sanningstabell.

1.11.6 *före detta 1.9.4.* Skapa en sanningstabell fr det logiska uttrycket $p \to q \wedge r$.

11. Bevisföring och logisk härledning

Utrustade med sanningstabeller kan vi klarlägga hur man resonerar på ett logiskt hållbart sätt. Vi kan mekaniskt, räknemässigt fastställa om en slutsats verkligen följer av ett antal premisser eller inte. Det går bra då antalet utsagor som är inblandade är 4 eller 5. Men om antalet utsagor är större blir det svårare. Betrakta följande härledning.

1. $p \to q$
2. $r \vee s$
3. $\neg s \to \neg t$
4. $\neg q \vee s$
5. $\neg s$
6. $\neg p \wedge r \to u$
7. $w \vee t$

$\therefore$ $u \wedge w$

Den här härledningen involverar 7 utsagor och om vi skulle kontrollera huruvida den är korrekt eller inte skulle vi behöva använda en sanningstabell med $2^7 = 128$ rader. Det är alldeles för tungt. Vi ska i detta avsnitt studera en alternativ teknik som vi kallar *bevisföring* där vi utgår från de logiska lagarna och härledningsreglerna och kalkylerar som vanligt med utsagor, men tekniken involverar en del känsla snarare än mekanik. En sanningstabell är ju bara att räkna ut. Bevisföring kräver att utföraren kan styra processen mot ett mål. Ett exempel får illustrera.

Exempel: Avgör om följande härledning är korrekt.

1. $p \to q$
2. $\neg q \vee r$
3. $\neg r$

$\therefore$ $\neg p$

Vi vill undersöka om slutsatsen $\neg p$ *verkligen* följer av de tre premisser och då kan vi resonera så här:

Vi ser att premiss 2 är en disjunktion mellan två utsagor ($\neg q \vee r$). Den ena av dessa utsagor (r) är falsk enligt premiss 3 ($\neg r$). Då kan vi använda *Disjunktiv Syllogism* på premisserna 2 och 3 och dra slutsatsen att $\neg q$ måste vara sann. Vi inför det som en fjärde premiss och skriver det så här:

4. $\neg q$, följer av 2, 3 och *Disjunktiv Syllogism.*

Lägg särskilt märke till att vi motiverar vår slutsats fullständigt, vi anger de premisser vi baserar oss på (2 och 3) och namnger också den slutledningsregel som används – *Disjunktiv Syllogism.*

Nu har vi mer information som vi kan arbeta vidare med. Vi ser att premiss 4 uttrycker att q är falsk. Samtidigt betraktar vi premiss 1 som uttrycker att q följer av p. Men om efterledet i en implikation (här q) inte är sant så kan ej heller förledet vara sant. Det var det som kallades *Modus Tollens* och vi kan alltså på grundval av premisserna 1 och 4 med härledningsregeln *Modus Tollens* dra slutsatsen $\neg p$. Vi noterar det på samma sätt som förut genom att ange slutsatsen, de premisser som vi baserar slutsatsen på tillsammans med den härledningsregel som användes. Så här:

5. $\neg p$, följer av 1, 4 och *Modus Tollens.*

Vi observerar också att det också var detta som hävdades var en korrekt slutsats i härledningen och vi kan således dra slutsatsen att härledningen var korrekt.

När vi löser ett problem av ovanstående slag räcker det med en sammanfattande uppradning av alla slutsatser, premisser som vi baserar oss på och slutledningsregler. Det kan se ut så här:

1.	$p \to q$	
2.	$\neg q \vee r$	
3.	$\neg r$	
$\therefore$	$\neg p$	
4.	$\neg q$	2, 3, *Disjunktiv Syllogism.*
5.	$\neg p$	1, 4, *Modus Tollens.*

Slutsats: Eftersom $\neg p$ följer av de givna premisserna 1, 2 och 3 är slutledningen korrekt.

Det är också viktigt att tydligt artikulera vilka slutsatser som dras, så orden ”Slutsats: Eftersom $\neg p$ följer ... ” är inte överflödiga utan nödvändiga. Vi studerar ett exempel till.

Exempel: är följande slutledning korrekt?

1. $p \to q$
2. $q \to r$
3. $p \vee q$

$\therefore$ $\neg r$

Vi börjar härleda nya premisser:

4. $p \to r$, följer av 1, 2 och *Hypotetisk Syllogism*
5. r, följer av 3, 4, 2 och *Dilemma.*

Vi ser här att följden i 5 som är r är *motsatt* den slutledning som hävdades ($\neg r$). Vi drar av detta slutsatsen att slutledningen *inte* är korrekt.

Anmärkning 1: Om slutsatsen istället för $\neg r$ hade lytt r så *hade* härledningen varit korrekt och att vi kom fram till 4 och 5 ovan hade varit ett bevis av att slutledningen var korrekt.

Anmärkning 2: Det finns en annan situation där en slutledning inte kan uppfattas som korrekt. I fallet här ovan såg vi att slutledningen inte kunde vara korrekt eftersom vi fick raka motsatsen till det som skulle följa, men vi skulle också kunna haft en situation där slutsatsen helt enkelt inte kan följa av de givna premisserna, men inte heller motsatsen till slutsatsen kan följa. Vi visar att den situationen är uppfylld genom att ange en tilldelning av sanningsvärden till de ingående utsagorna så att alla premisser är uppfyllda men samtdigt är inte slutsatsen uppfylld. Vi kommer att stöta på sådana exempel längre fram.

Hur ska man veta vilka nya premisser som är lämpliga att härleda? Det finns inget bra svar på den frågan. Det vi kan göra är att betrakta en härledning och i huvudet genomföra några led för att känna efter vartåt ett visst spår leder. Detta är en förmåga som behöver utvecklas genom träning. De exempel vi studerat hittills har varit små, men exemplet i början var stort och vi ska nu återvända till det. Vi rekommenderar dock läsaren att försöka lite på egen hand innan hen läser vidare.

Exempel: Avgör om följande slutledning är korrekt eller inte.

1. $p \to q$
2. $r \vee s$
3. $\neg s \to \neg t$
4. $\neg q \vee s$
5. $\neg s$
6. $\neg p \wedge r \to u$
7. $w \vee t$

$\therefore$ $u \wedge w$

Det kommer att visa sig att härledningen är korrekt. Vi tar nu de steg som behövs för att komma fram till det. Det går till på samma sätt som förut:

8. $\neg t$, följer av 5, 3 och *Modus Ponens.*
9. w, följer av 7, 8 och *Disjunktiv Syllogism.*

Varför härleder vi w? Jo, om vi betraktar slutsatsen, $u \wedge w$, som vi hävdar följer av premisserna 1-7, består den av w och u. Vi har i ett första steg lyckats visa att w är sann. Om vi i fortsättningen lyckas visa att även u är sann så kan vi dra slutsatsen att konjunktionen $u \wedge w$ är sann vilket fullbordar beviset för att slutledningen är riktig.

Vi går nu vidare och visar hur u följer av premisserna.

10.	r,	följer av 2, 5 och *Disjunktiv Syllogism.*
11.	$\neg q$,	följer av 5, 4 och *Disjunktiv Syllogism.*
12.	$\neg p$,	följer av 11, 1 och *Modus Tollens.*
13.	$\neg p \wedge r$,	10, 12.
14.	u,	följer av 13, 6 och *Modus Ponens.*

Vi har nu visat hur u blir sann. Vi slår nu samman 9 och 14 och får:

15. $u \wedge w$.

Slutledningen är *korrekt.*

Anmärkning: Vi har ingen slutledningsregel som stödjer oss att skriva slutsats 13. $\neg p \wedge r$ för vi har ju tidigare de båda slutsatserna 10. r respektive 12. $\neg p$ och då har kan vi ju föstå uttrycka att både 10. r och 12. $\neg p$ gäller mer kompakt genom att införa 13. $\neg p \wedge r$. Motsvarande gäller förstås då vi drar slutsatsen 15 $u \wedge w$ som alltså bara är en omskrivning av att 9 och 14 gäller. I beviset skriver vi att vi "slår samman 9 och 14".

Det gäller alltså att pussla och fundera när man arbetar med frågeställningar av den här typen. I början är det lätt att känna sig lite vilsen, men det är bara att träna.

Vi kommer också att införa en del tekniker och strategier som på sätt och vis kan uppfattas ha sina grunder i härledningsreglerna. Den första strategin kallas *falluppdelning.*

11.1. **Falluppdelning.** Vi inför denna härledningsstrategi genom att studera ett exempel.

Exempel: är nedanstående slutledning korrekt?

1.	$\neg r \to s$
2.	$s \to u$
3.	$u \to t$
4.	$r \to t$
$\therefore$	t

Vi vet att för alla utsagor gäller att de antingen är sanna eller falska. Detta gäller också för utsagan s. Låt oss anta $\neg s$ och se vilka följder det får:

5.	$\neg s$,	antagande för bevis genom falluppdelning (första fallet, från 5).
6.	r,	följer av 5, 1 och *Modus Tollens.* (Första fallet, från 5.)
7.	t,	följer av 6, 4 och *Modus Ponens.* (Första fallet, från 5.)

Vi har alltså visat att om $\neg s$ är sann så följer t. Vi går nu vidare och undersöker vad som händer om vi antar s. Det viktiga i den här strategin är att vi vet att *något* av de fall vi undersöker gäller. Eftersom de två fallen vi undersöker är $\neg s$ (första fallet) respektive s (andra fallet) så vet vi *säkert* att något av dessa fall gäller.

8.	s,	antagande för bevis genom falluppdelning (andra fallet från 8).
9.	u,	följer av 8, 2 och *Modus Ponens.* (Andra fallet från 8.)
10.	t,	följer av 9, 3 och *Modus Ponens.* (Andra fallet från 8.)

Vi ser att t tydligen följer av såväl $\neg s$ som s. Eftersom något av dessa fall måste vara uppfyllt drar vi slutsatsen att t följer av de givna premisserna. Vi motiverar detta genom att hänvisa till alla de föregående raderna.

11. t, följer av 5-10 och härledning genom falluppdelning.

Slutledningen är därför *korrekt.*

I det här exemplet har vi också infört ett skrivsätt för att vara extra tydliga. På varje rad som beaktas under förutsättning av ett antagande markerar vi det genom att skriva texten "första fallet från 5" eller "andra fallet från 8". Det är viktigt att dessa texter skrivs ut för att markera att vi arbetar under ett antagande.

Vi kan inte dra någon slutligt slutsats så länge vi arbetar under ett antagande, och den slutliga slutsatsen må referera till de gjorda antagandena på ett sammanfattande sätt och det är därfoör vi har motiveringen av slutsatsen på rad 11 som lyder "följer av 5-10 och härledning genom falluppdelning" där radangivelserna 5-10 förstås hänvisar bakåt till de rader som användes under härledningen. Observera att falluppdelningsbeviset alltså är ofullständigt utan den sammanfattande slutsatsen.

Anmärkning: när man arbetar med falluppdelning är det kritiskt viktigt att vi vet att något av fallen verkligen gäller. Falluppdelning bygger i princip på *Dilemma* som säger att

1.	$p \vee q$
2.	$p \to r$
3.	$q \to r$
$\therefore$	r

är en korrekt slutledning. De två fallen modelleras här av disjunktionen $p \vee q$ och motsvarades i exemplet ovan av $\neg s \vee s$ som ju alltid är sann. (Om någon av premisserna hade varit en disjunktion skulle vi också kunnat gjort en fallupdelning baserat på den.)

11.2. **Indirekt härledning.** Nästa strategi som vi ska studera kallas *indirekt härledning* och vi studerar den i ett exempel. Innan vi studerar strategin ska vi dock införa en specialsymbol för att symbolisera utsagan som alltid är falsk, eller en *motsägelse.* Vi skriver

$$\perp$$

för den utsaga som alltid är falsk. Den utsagan kan kallas "den falska utsagan" eller, på engelska *contradiction.* Till exempel är utsagan $p \wedge \neg p$ alltid falsk för alla utsagor p så vi har alltså

$$p \wedge \neg p \Leftrightarrow \perp.$$

Vi kan, genom att dra oss till minnes grundläggande logiska regler, och lagar inse att följande regler gäller för $\perp$ (p är en godtycklig utsaga):

$$\perp \vee p \Leftrightarrow p \qquad \perp \wedge p \Leftrightarrow \perp \qquad \perp \to p.$$

Om vi sätter upp $\perp$ i en sanningstabell så blir dess kolumns sanningsvärden alla lika med falsk.

Bevis genom indirekt härledning, eller kortare, ett "indirekt bevis" går ut på att göra ett antagande och markera det tydligt som en utgångspunkt och sedan arbeta sig fram med strikta logiska härledningar tills en motsäglse nås. Slutsatsen i det läget är att det ursprungliga antagandet (som är tydligt markerat!) måste vara falskt. Men det betyder ju att det som är visat är *motsatsen* till det som antogs.

Vi tar ett exempel.

Exempel: är följande slutledning korrekt?

1.	$p \to q$
2.	$q \to \neg p$
$\therefore$	$\neg p$

Som i förra exemplet ger oss de båda premisserna $p \to q$ och $q \to \neg p$ just ingen startpunkt, de är bara implikationer som pekar åt olika håll. Var ska vi starta? Vi kan införa en egen startpunkt och göra ett antagande. Sedan kan vi behandla antagandet som en premiss och se vart det leder. Det var vad vi gjorde i strategin med falluppdelning ovan, men här letar vi efter en *motsägelse.* Om en motsägelse dyker upp vet vi att antagandet inte kan vara sant.

Vi inför därför:

4. p antagande för indirekt härledning.

och observerar att 1 och 4 tillsammans med *Modus Ponens* ger oss q så vi inför det med ett eget radnummer. Dock betonar vi från och med nu att alla efterföljande slutsatser gäller under antagandet på rad 4 med en särskild kommentar: (samt från antagande, rad 4). Vi skriver detta så här:

5. q, följer av 1, 4, *Modus Ponens* (och antagandet i 4).

Vi går vidare och får $\neg p$ från 2 och 5 och *Modus Ponens* och eftersom vi fortfarande jobbar under antagandet från rad 4 så protokollför vi detta så här:

6. $\neg p$, följer av 2, 5, *Modus Ponens* (och antagandet i 4).

Detta är motsägelsen som vi söker, vi har antagit 4. p och nu nått $\neg p$. Vi har alltså kommit fram till $p \wedge \neg p$ som vi betecknar med $\perp$. Vi inför det som ny slutsats och skriver

7. $\perp$, följer av 4, 6 (och antagandet i 4).

Nu kommer ett nytt skede i bevisföringen, när vi nått fram till $\perp$ (som här också kunde uttryckts $p \wedge \neg p$) kan vi skriva

8. $\neg p$, följer av 4-7 och indirekt härledning.

Och av detta drar vi slutsatsen att härledningen måste vara korrekt.

Observera återigen att beviset inte är fullbordat förrän den sammanfattande slutsatsen ges som hänvisar till alla tidigare rader.

På samma sätt som falluppdelning bygger på *Dilemma* så bygger indirekt härledning på *Modus Tollens* som lyder

1. $p \to q$
2. $\neg q$

$\therefore$ $\neg p$

och vi skulle kunna se premisserna 1 och 2 i *Modus Tollens* ovan som att de har en hemlighet begravd: nämligen att $\neg p$ gäller (alltså att p är sann). Och genom att anta p och se vad som händer så kan vi dra en slutsats om huruvida p är sant eller ej. Enligt *Modus Ponens* med premiss 1 *och antagandet* p följer ju q och vi har en motsägelse mot premiss 2. På så sätt kan premisserna i *Modus Tollens* så att säga anses ha $\neg p$ som en slutsats som väntar på att dras. I exemplet ovan var det slutsatsen $\neg p$ som så att säga var dold i premisserna. En slutsats som väntade på att dras även fast den inte var uppenbar från början.

Vi tar ett exempel till på indirekt härledning. Detta är hämtat från en tentamensskrivning i Diskret matematik hösten 2003.

Exempel: är följande slutledning korrekt?

1. $r \to s$
2. $s \to \neg r$
3. $t \to u$
4. $u \to \neg t \vee r$

$\therefore$ $\neg t$

Vi antar r och ser vart det leder.

5. r, antagande för indirekt härledning.
6. s, följer av 5, 1 och *Modus Ponens* (och antagandet i 5).
7. $\neg r$, följer av 6, 2 och *Modus Ponens* (och antagandet i 5).
8. $\perp$, följer av 5, 7 (och antagandet i 5).
9. $\neg r$, 5-8 och indirekt härledning.

Vi verkar inte komma längre. Vi har etablerat att $\neg r$ är sant, men hur gör vi nu? Vi kan upprepa proceduren, fast med en annan utsaga. Vi antar t och ser vart det leder.

10.	t,	antagande för indirekt härledning.
11.	u,	följer av 10, 3 och *Modus Ponens* (och antagandet i 10).
12.	$\neg t \vee r$,	följer av 11, 4 och *Modus Ponens* (och antagandet i 10).
13.	$\neg t$,	följer av 12, 9 och *Disjunktiv Syllogism* (och antagandet i 10).
14.	$\perp$,	följer av 10, 13 (och antagandet i 10).
15.	$\neg t$	10-14 och indirekt härledning.

Slutsatsen i 15 är $\neg t$ vilket alltså följer av premisserna och slutledningen är därför korrekt.

Anmärkning: När slutsatserna 11-15 dras kan vi inte hänvisa till slutsatserna 6 eller 7 (och förstås inte heller 8) eftersom dessa slutsatser endast gäller under antagandet i 5. r.

11.3. **Hypotetisk härledning.** Vi ska ge ytterligare en strategi för att visa att en implikation är sann. På sätt och vis kan vi säga att indirekt härledning var ett sätt att visa att en negation är sann (vi visar alltså $\neg p$ genom att anta p och se att det leder till en motsägelse). Hypotetisk härledning liknar indirekt härledning genom att den inleds med ett antagande och det måste ske en sammanfattande slutsats för att fullborda härledningen. Skillnaden mot de andra strategierna är att hypotetisk härledning används för att visa att en implikation är sann genom att vi utgår från ett antagande, vi kallar det p, sedan använder vi de vanliga logiska slutledningsreglerna och kanske till och med en av strategierna och kommer fram till en slutsats, vi kan kalla den q. Hela tiden noterar vi att vi arbetar under antagandet p. Den sammfattande slutsatsen bli nu $p \to q$ och det vi visar är alltså en *implikation*, där förledet är det antagande vi utgår från och efterledet är den sista slutsatsen innan vi skriver ner den sammanfattande slutsatsen (som är implikationen själv). Vi ser på ett exempel:

Exempel: Visa att nedanstående härledning är korrekt.

1.	$p \vee q \vee r$
2.	$s \to p$
3.	$\neg r \vee \neg q$
$\therefore$	$r \to p$

Vi ska alltså visa att implikationen $r \to p$ följer av de tre premisserna så vi gör det med hjälp av hypotetisk härledning. Vi skriver det på följande sätt:

4. r, Antagande för hypotetisk härledning

Sedan arbetar vi vidare med logiska slutledningar som vanligt tills vi kommer till slutsatsen p. Under hela den gången behåller vi noteringen att allt sker under antagandet på rad 4. Vi får:

5.	$\neg q$,	följer av 3, 4, *Disjunktiv Syllogism* (och antagandet i 4).
6.	$p \vee s$,	följer av 1, 5, *Disjunktiv Syllogism* (och antagandet i 4).
7.	$p \vee \neg s$	Omskrivning av 2 (och antagandet i 4).
8.	$(p \vee s) \wedge (p \vee \neg s)$	Sammanslagning av 6 och 7 (och antagandet i 4).
9.	$p \vee (s \wedge \neg s)$	8 och distributiva lagen (och antagandet i 4).
10.	$p \vee \perp$	Omskrivning av 9 (och antagandet i 4).
11.	p	Förenkling av 10 (och antagandet i 4).

I det här läget är vi redo att göra den sammanfattande slutsatsen $r \to p$, alla logiska steg har skett under antagandet i 4 (som var förledet r) och uppenbarligen har detta lett fram till efterledet p. Slutsatsen $r \to p$ ligger så att säga dold i alla premisser, en slutsats som så att säga väntar på att dras. Vi formulerar den den sammanfattande slutsatsen så här:

12. $r \to p$ följer av 4-11 och hypotetisk härledning.

Även om inte alla slutledningar kräver att vi arbetar under antagandet i 4 så måste vi ändå poängtera att antagandet är verksamt på alla rader 4-11. Till exempel är omskrivningen enligt distributiva lagen på rad 9 giltig formellt sett, men att överhuvudtaget komma fram till rad 9 krävde antagandet å rad 4 så därför noteras det på alla rader som bygger på detta antagande att antagandet är verksamt ända tills vi kan göra den sammanfattande slutsatsen som avslutar den hypotetiska härledningen.

Vi tar ett lite mindre exempel för att få en bättre överblick av hur ett bevis med hypotetisk härledning formuleras.

Exempel: Visa att följande härledning är korrekt:

1. $p \to q$
2. $r \to s$

$\therefore \quad p \wedge r \to q \wedge s$

Vi ska alltså visa en implikation så vi inleder en hypotetisk härledning genom att anta att förledet gäller. Sedan fortsätter vi att lägga in logiska slutledningar och till sist (på rad 9) kan den sammanfattande slutsatsen göras.

3.	$p \wedge r$,	antagande för hypotetisk härledning.
4.	p,	från 3 (och antagandet i 3).
5.	q,	från 4, 1, *Modus Ponens* (och antagandet i 3).
6.	r,	från 3 (och antagandet i 3).
7.	s,	från 6, 2, *Modus Ponens* (och antagandet i 3).
8.	$q \wedge s$,	sammanslagning av 5 och 7 (och antagandet i 3).
9.	$p \wedge r \to q \wedge s$,	från 3-8 och hypotetisk härledning.

11.4. **Att kombinera olika strategier i samma bevisföring.** I alla tidigare exempel som involverade olika härledningsstrategier gavs den sammanfattande slutsatsen som sista led och det utgjorde hela lösningen till de problemställningar som studerades. Men det finns ingenting som hindrar att en härledning består av användning av flera olika härledningsstrategier både kommandes vid olika skeden i härledningen. Vi såg exempel på det ovan där indirekt härledning användes två gånger i samma härledning i uppgiften från en tentamensskrivning i diskret matematik från hösten 2003.

Nu ska vi se på ett exempel där två härledningsstrategier förekommer samtidigt. Visserligen är det en samtidigt användning av hypotetisk härledning med hypotetisk härledning men vi kan utgående från detta exempel föreställa oss att även olika härledningsstrategier kan förekomma samtidigt.

Exempel: Visa att följande härledning är riktig.

1. $p \vee q \to r$
2. $r \wedge s \to t$
3. $t \to q$

$\therefore \quad \neg p \wedge s \to (q \leftrightarrow t)$

Vi skapar en hypotetisk härledning eftersom vi ska visa en implikation. Vi inleder med ett antagande och arbetar oss vidare. I arbetet kommer det att vara lämpligt att göra ytterligare ett antagande så att en inre hypotetisk härledning uppstår. Då kommer vi att vara i en situation där två hypotetiska härledningar är igång samtidigt. (Vi kommer till och med att ha två hypotetiska härledningar efter varandra inom den större.)

4.	$\neg p \wedge s$,	antagande för hypotetisk härledning.
5.	$\neg p$,	4 (och antagandet i 4).
6.	q,	antagande för hypotetisk härledning (och antagandet i 4).
7.	$p \vee q$,	6, (och antagandet i 6) (och antagandet i 4).
8.	r,	7, 1 och *Modus Ponens* (och antagandet i 6) (och antagandet i 4).
9.	$q \to r$,	6-8 och hypotetisk härledning (och antagandet i 4).
10.	r,	antagande för hypotetisk härledning (och antagandet i 4).
11.	s,	4 (och antagandet i 10) (och antagandet i 4).
12.	$r \wedge s$,	10, 11 (och antagandet i 10) (och antagandet i 4).
13.	t,	12, 2, *Modus Ponens* (och antagandet i 10) (och antagandet i 4).
14.	$r \to t$,	10-13 och hypotetisk härledning (och antagandet i 4).
15.	$q \to t$,	9, 14, *Hypotetisk Syllogism* (och antagandet i 4).
16.	$q \leftrightarrow t$	3,15 (och antagandet i 4).
17.	$\neg p \wedge s \to (q \leftrightarrow t)$,	4-16 och hypotetisk härledning.

Övningar

1.12.1 *före detta 1.10.1.* Är följande härledning korrekt?

1. $p \to q$
2. $q \to r$
3. $\neg r$.

$\therefore \quad \neg p$

Formulera ett bevis genom att ange vilka härledningsregler som används fr att komma fram till slutsatsen $\neg p$ (som vi sett exempel på i avsnitett) om härledningen är korrekt.
Om härledningen inte är korrekt, använd en sanningstabell för att finna en tilldelning av sanningsvärden på p, q och r som uppfyller premisserna men inte slutsatsen.

1.12.2 *före detta 1.10.2.* Är följande härledning korrekt?

1. $p \to q$
2. $q \to r$
3. $\neg r$.

$\therefore \quad \neg p \wedge \neg q$

Formulera ett bevis genom att ange vilka härledningsregler som används för att komma fram till slutsatsen $\neg p \wedge \neg q$ om härledningen är korrekt. Om härledningen inte är korrekt, använd sanningstabelll för att finna en tilldelning av sanningsvärden på p, q och r som uppfyller premisserna men inte slutsatsen.

1.12.3 *1.10.3.* Visa att följande härledning är korrekt genom att ange de härledningsregler som successivt leder fram till slutsatsen.

1. $p \vee q$
2. $r \vee \neg p$
3. $t \vee r \vee \neg q$
4. $p \to \neg t$
5. $t \to \neg q$

$\therefore \quad r$

Ledning: Det finns olika ansatser. Du kan arbeta med att omformulera premisserna, till exempel gäller 2. $r \vee \neg p \Leftrightarrow \neg p \vee r \Leftrightarrow p \to r$. Du kan också anta motsatsen till det som ska visas (r) och se vart det leder. Det bör leda till en motsägelse. Du kan också kombinera dessa båda angreppssätt.

12. Vad är logik bra för?

Detta inledande kapitel i logik är en grund för all teori som kommer efter. All matematik bygger på att vi har en förmåga till tydliga och korrekta resonemang och det är precis logikens syfte: att vi ska kunna uttrycka oss klart och tydligt och resonera riktigt.

De olika bevisteknikerna med de olika strategierna för att kunna dra slutsatser är en grund till den matematiska *bevisföringen.* Med ett *bevis* i matematiken menar vi ett formellt solitt argument som utom allt tvivel säkerställer ett visst faktum, en matematisk utsaga. I den här framställningen ska vi se ”härledning” och ”bevis” som två synonymer.

Blandade övningar

Blandade övningar är generellt av tentamenskaraktär.

1.1 Skapa en sanningstabell fr det logiska uttrycket $(p \vee q) \wedge (q \to \neg r)$.

1.2 Använd sanningstabellen i föregående uppgift för att överväga om det går att att dra slutsatsen $(p \vee q) \wedge (q \to \neg r) \Rightarrow p \vee \neg r$.

1.3 Skapa en sanningstabell för det logiska uttrycket $((p \wedge \neg q) \vee (q \to \neg r)) \wedge \neg(p \to r)$.

1.4 Använd sanningstabellen i föregående uppgift för utreda om det går att att dra slutsatsen $((p \wedge \neg q) \vee (q \to \neg r)) \wedge \neg(p \to r) \Rightarrow p$.

1.5 Skapa en sanningstabell fr det logiska uttrycket $((p \to q) \to (r \wedge \neg s)) \to (\neg p \wedge \neg r)$.

1.6 Använd sanningstabellen i föregående uppgift för att dra slutsatsen $((p \to q) \to (r \wedge \neg s)) \to (\neg p \wedge \neg r) \Rightarrow p \to q$.

1.7. Ge en sanningstabell för följande uttryck $(p \vee (\neg p \vee q)) \wedge \neg(q \wedge \neg r)$.

1.8. Är följande slutledning korrekt?

1. $p \to q$
2. $q \to \neg p$
3. $p \vee r \vee s$
4. $s \to t$
5. $t \to (\neg s \vee p)$

$\therefore \; r$

Om slutledningen är korrekt, det vill säga om r följer av premisserna 1-5, så visa hur. Antingen genom sanningstabell eller genom att rada upp slutledningsregler (*Modus Ponens etc.*) med angivande av hur premisserna anvnds för att komma fram till r. Om slutledningen inte är korrekt, ange en tilldelning av sanningsvärden som uppfyller premisserna, men inte r. *(Från tentamen i diskret matematik den 13 januari 2004.)*

1.9 Är följande logiska slutledning korrekt? I så fall ange hur man kommer fram till slutsatsen samt ange vilka logiska slutledningsregler (*Modus Ponens, Modus Tollens etc.*) som används. Om slutledningen inte är korrekt, ge ett exempel på en tilldelning av sanningsvärden på utsagorna p, q, r och s som uppfyller premisserna men inte slutsatsen.

1. $\neg s \wedge q$
2. $p \wedge q \to r$
3. $s \vee \neg r$

$\therefore \; \neg p$

(Från tentamen i diskret matematik den 21 december 2000.)

1.10 Avgör om följande slutledning är logiskt korrekt eller inte. Om den är logiskt korrekt, visa i så fall hur slutsatsen följer av premisserna 1-3. Ange då också alla slutledningens delsteg med angivande av alla slutledningsregler. Om slutledningen inte är korrekt, ange en tilldelning av sanningsvärden (sant eller falskt) till p, q och r som uppfyller premisserna men inte slutsatsen.

1. $p \to q \vee r$
2. $p \vee \neg q$
3. $r \vee q$

$\therefore \; q$

(Från tentamen i diskret matematik den 11 januari 2001.)

1.11 Är följande logiska slutledning korrekt?

1. $p \vee q$
2. $q \vee r$
3. $p \vee r$
4. $p \to s$

$\therefore \; q \vee s$

Om den är korrekt, visa hur slutsatsen följer av premisserna och ange tydligt vilka slutledningsregler du använder (*Modus Ponens, Tollens etc.).* Om den inte är korrekt, ge ett exempel på en tilldelning av sanningsvärden fr utsagorna p, q, r och s som uppfyller premisserna men inte slutsatsen.
(Från tentamen i diskret matematik den 18 april 2001.)

1.12 Låt p, q, r, s och t vara utsagor. Är följande logiska slutledning riktig?

1. $p \vee q$
2. $q \to r$
3. $p \wedge s \to t$
4. $\neg r$
5. $\neg q \to s$

$\therefore \; t.$

Om slutsatsen är riktig, visa varför genom att bevisa att t följer logiskt från premisserna 1-5. Redovisa varje delsteg med angivande av namnet på den logiska regel ni använder. Om slutledningen inte är riktig ange en situation då det inte stämmer (dvs ange en tilldelning av sanningsvrden som uppfyller alla premisser men där ändå inte t är sann).
(Från tentamen i diskret matematik den 17:e december 1999.)

Använd sanningstabeller eller bevisföring för att avgöra om nedanstående härledningar är korrekta eller inte.

1.13

1. $p \to q \wedge r$
2. $q \to r \wedge s$
3. $s \to r$
4. $r \to \neg s$

$\therefore\ \neg p$

1.14

1. $p \to q$
2. $\neg r \to \neg q$
3. $\neg(r \wedge u)$
4. $s \to (t \wedge u)$

$\therefore\ \neg(s \wedge p)$

1.15

1. $p \to q$
2. $\neg r \to \neg q$
3. $\neg(r \wedge u)$
4. $s \to (t \wedge u)$

$\therefore\ t$

1.16

1. $r \to \neg p$
2. $p \vee q$
3. $p \to r$
4. $\neg r \to \neg q$

$\therefore\ q$

1.17 Nedanstående härledning innehåller en motsägelse. Ta bort en premiss så att premisserna inte motsäger varandra. Avgör sedan om slutledningen är korrekt. (Det kan finnas flera lösningar till denna uppgift.)

1. $p \vee r$
2. $p \to r$
3. $r \to s$
4. $\neg s$
5. $s \to q$

$\therefore\ q$