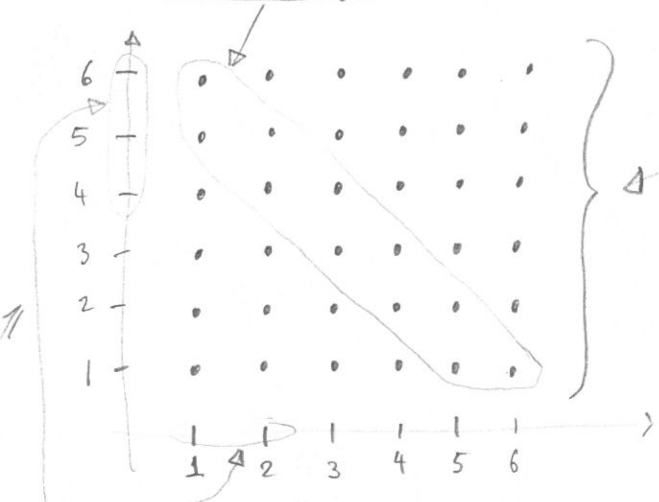
9.2.1 Sannolikheten att få krona åtminstone en gång vid fem singlingar söks. Ett lämpligt utfallsrum (alltså en karta över alla möjliga utfall) ges i uppgift 9.2.6. Den sökta sannolikheten blir då procentandelen av de 32 möjliga utfallen där har åtminstone en krona, det är i 31 av fallen. (krona = 0:a). Så svaret är $\frac{31}{32} \approx 0.97$. Omvänt blir sannolikheten att inte få en enda krona $\frac{1}{32} \approx 0{,}03$.

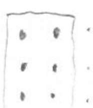
9.2.2 Utfallsrum för att beskriva utfallen av kast med två vanliga sexsidiga färningar $= \{(x,y) : 1 \leq x \leq 6,\ 1 \leq y \leq 6,\ x,y \in \mathbb{Z}\} = 36$ utfall

sannolikheten att det blir summa 6 eller 7 är procentandelen av totala ant. utfall där detta är uppfyllt också kallat $\frac{m}{n}$ där $m =$ antalet gynnsamma utfall och $n =$ totala antalet utfall $= 36$



$\frac{m}{n} = \frac{11}{36} \approx 0.31 = \underline{\underline{31\%}}$

Om den ena färningen är röd och den andra är grön, vad är sannolikheten att den röda visar mindre än 3 och den andra visar mer än 3

det ger antal gynnsamma utfall = 6, de 6 i övre vänstra hörnet  så sannolikheten är $\frac{6}{36} = \underline{\underline{1/6}}$

AVSNITT: 2 UPPGIFTER: 9.2.3, 9.2.4, (9.2.5), 9.2.6

9.2.3. Ange ett lämpligt utfallsrum för experimentet där vi singlar tre mynt och studerar resultaten av alla tre mynt parallellt. 0 = krona, 1 = klave.

Då blir det $\{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$.

Totalt 8 olika utfall.

9.2.4. Sannolikheten för udda antal krona vid tre singlingar av ett mynt kan fås genom att använda utfallsrummet i föreg. uppgift. Att singla "ett mynt" tre gånger kan modelleras också som att "singla tre mynt". Så vi löser problemet genom att beräkna procentförekomsten av antal utfall med udda antal 0:or (krona) och det är de 4 utfallen (0,0,0), (0,1,1), (1,0,1) och (1,1,0) så svaret är $\frac{4}{8} = \underline{\underline{0.5}}$

9.2.5. Hör till avsnitt 3.

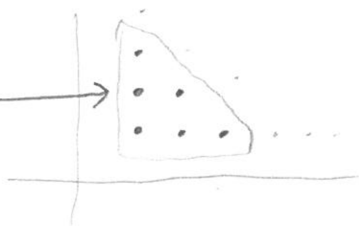
9.2.6. Att singla ett mynt 5 gånger kan studeras med utfallsrummet som består av femtipplar av 0:or och 1:or : $\{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} =$
$\{(0,0,0,0,0), (0,0,0,0,1), (0,0,0,1,0), (0,0,0,1,1), (0,0,1,0,0), (0,0,1,0,1), (0,0,1,1,0), (0,0,1,1,1), (0,1,0,0,0), (0,1,0,0,1), (0,1,0,1,0), (0,1,0,1,1), (0,1,1,0,0), (0,1,1,0,1), (0,1,1,1,0), (0,1,1,1,1), (1,0,0,0,0), (1,0,0,0,1), (1,0,0,1,0), (1,0,0,1,1), (1,0,1,0,0), (1,0,1,0,1), (1,0,1,1,0), (1,0,1,1,1), (1,1,0,0,0), (1,1,0,0,1), (1,1,0,1,0), (1,1,0,1,1), (1,1,1,0,0), (1,1,1,0,1), (1,1,1,1,0), (1,1,1,1,1)\}$ tot. 32 st.

- sannolikheten att få precis tre krona blir då procentförekomsten av antal utfall med precis 3 nollor, de är 8 st, så $\frac{8}{32} = \underline{0.25}$.
- sannolikheten att få tre krona eller mer blir då $16/32 = \underline{0.5}$ eftersom antal utfall med 3 krona eller mer är 16.

AVSNITT: 2 UPPGIFTER: 9.2.7, 9.2.8, 9.2.9

9.2.7. Betraktar vi utfallsrummet i uppgift 9.2.2 ser vi att precis för utfallen (1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1) (som är 6 st) har vi tärningsumman 4 eller mindre. De är i lägre vänstra hörnet av diagrammet

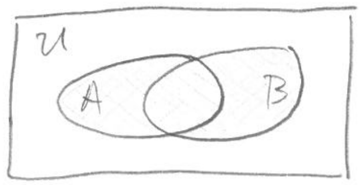
Dessa utfall är i procent av 36



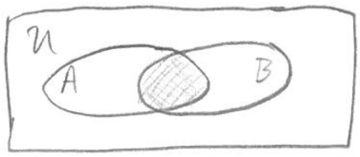
$$\frac{6}{36} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$ som alltså är den sökta sannolikheten.

9.2.8 Det finns lika många sätt att få udda och jämna summor vid kast med tre tärningar så det är 50% = 0.50 sannolikhet att få en jämn summa.

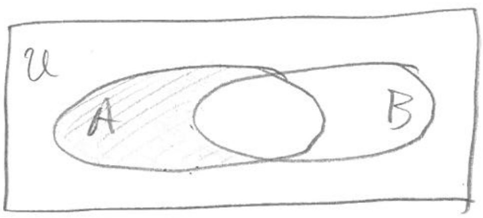
9.2.9 a) $A \cup B$ = "A eller B inträffar"



b) $A \cap B$ = "A och B inträffar"

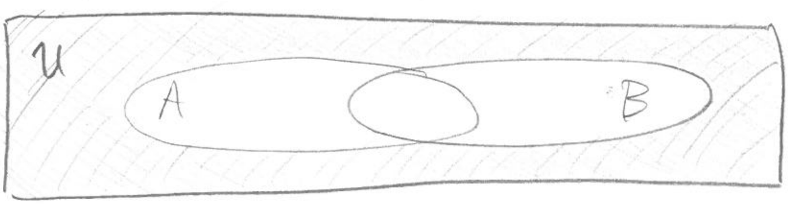


c) $A - B$ = "A inträffar, men inte B"



d) $A \cap B^c$ = PRECIS SAMMA som c)

e) $A^c \cap B^c$ = "A inträffar inte och inte heller B" (= "varken A eller B inträffar")



9.2.5. $U = \{0, 1, 2, 3\}$ = utfallsrummet för experimentet där vi singlar ett mynt 3 gånger och räknar antalet gånger vi får krona. Utfallen är nu alltså inte individuella slantsinglingar utan vi studerar antal "krona" vid 3 slantsinglingar. För att hitta $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$ och $p(3)$ kan vi ändå använda utfallsrummet hörande till 3 slantsinglingar representerat med binära strängar:

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111

där 0 representerar "krona" och 1 representerar "klave".

Den individuella sannolikheten att "få 0 kronor", alltså $p(0)$, blir nu $\frac{1}{8} = 0.125$ eftersom det bara finns ett sätt att få "inga kronor" som representeras av 111.

Den individuella sannolikheten att "få 1 kronor", alltså $p(1)$, blir nu $\frac{3}{8} = 0.375$ eftersom det finns 3 möjligheter att få en krona, som representeras av 011, 101, 110.

På samma sätt blir $p(2) = \frac{3}{8}$ (001, 010, 100)

och $p(3) = \frac{1}{8}$ (000).

Vi skapar alltså ett nytt utfallsrum $U = \{0, 1, 2, 3\}$ baserat på ett annat ($\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$) och vi har alltså

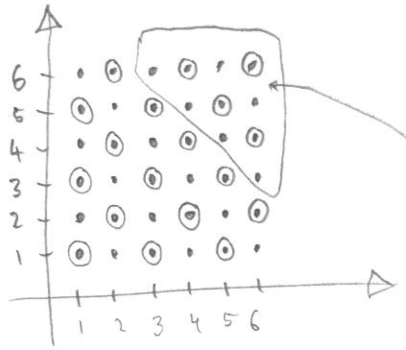
$$p(0) = p(3) = \frac{1}{8} \text{ resp } p(1) = p(2) = \frac{3}{8}$$

9.3.1. Kast med två sexsidiga tärningar. Utfallsrum

Inför händelserna

E = tärningssumman är jämn

F = tärningsumman är större än 8



dessa händelser illustreras i utfallsrummet

E-händelsens utfall har ringar runt sig och F-händelsen är inringad i övre högra hörnet.

Sökt sannolikhet $= P(E \cup F) = \frac{m}{n} = \frac{24}{36} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

eftersom vi har $m = 24$ utfall som ligger i <u>någon</u> (eller båda) av E och F och totala antalet utfall är 36.

9.3.2 Vi har inte $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$ eftersom vi har 4 utfall (de 4 inringade överst till höger) som ligger i både E och F.

9.3.3. $P(E \cup F \cup G) = P(E) + P(F) + P(G) - P(E \cap F) - P(E \cap G)$
$- P(F \cap G) + P(E \cap F \cap G)$

och detta påminner förstås om <u>principen för inklusion och exklusion</u>. (Med $G = \emptyset$ i denna uppgift beskrivs problemet i de två föregående uppgifterna.)

AVSNITT: 3 UPPGIFTER: 9.3.4, 9.3.5, 9.3.6, 9.3.7

9.3.4. E = händelsen att det dragna kortet är ett ess

S = händelsen att det dragna kortet är svart.

Sökt sannolikhet: $P(E \cup S) = P(E) + P(S) - P(E \cap S)$

$P(E) = 1/13$ $P(S) = 1/2$ $P(E \cap S)$ = sannolikheten att vi drar ett svart ess $= \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

Så $P(E \cup S) = \frac{1}{13} + \frac{1}{2} - \frac{1}{26} = \frac{4}{52} + \frac{26}{52} - \frac{2}{52} = \frac{28}{52} = \underline{\underline{\frac{7}{13}}}$

9.3.5 $P(E \cup F \cup G \cup H) = P(E) + P(F) + P(G) + P(H) +$

$- P(E \cap F) - P(E \cap G) - P(E \cap H) - P(F \cap G) - P(F \cap H) - P(G \cap H) +$

$+ P(E \cap F \cap G) + P(E \cap F \cap H) + P(E \cap G \cap H) + P(F \cap G \cap H) +$

$- P(E \cap F \cap G \cap H)$.

och detta anknyter förstås till principen för inklusion och exklusion med 4 mängder.

9.3.6. Två sexsidiga tärningar kastas. Inför händelserna

E = ena tärningen visar 6 F = andra tärningen visar 6

då gäller $E \cap F$ = båda tärningarna visar 6 och $P(E \cap F) = \frac{1}{36}$

så den sökta sannolikheten är $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{6+6-1}{36} = \underline{\underline{11/36}}$

9.3.7. Från en kortlek tas ett kort. Inför händelserna

E = kortet är ett ess, R = kortet är ett ruter.

a) $P(E) = 4/52 = 1/13$ (det finns 4 ess i en kortlek på 52 kort)

b) $P(R) = 13/52 = 1/4$ (det finns 13 ruter i en kortlek på 52 kort)

c) $P(E \cup R) = P(E) + P(R) - P(\underbrace{E \cap R}_{\text{kortet är Ruter ess, finns bara 1}}) = \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52} = \frac{4+13-1}{52}$

$= 16/52 = \underline{\underline{4/13}}$

9.3.8. $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.8$, $P(A \cup B) = 0.85$. $\left(P(A \cup B) = P(A) + P(B) + \\ - P(A \cap B)\right)$

a) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.7 + 0.8 - 0.85 = \underline{\underline{0.65}}$

b) $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.8 - 0.65 = \underline{\underline{0.15}}$

c) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.7 - 0.65 = \underline{\underline{0.05}}$

d) Att exakt en av A och B inträffar brukar betecknas $A \oplus B$ och den är $(A - B) \cup (B - A)$. Mängderna $A - B$ och $B - A$ är disjunkta så vi har den sökta sannolikheten given av $P(A \oplus B) = P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A) = 0.05 + 0.15 = \underline{\underline{0.2}}$

9.3.9. Givet i problemets formulering: $P(F_1) = 0.1$, $P(F_2) = 0.15$ och $P(F_1 \cap F_2) = 0.05$.

a) $P(F_1 \cup F_2) = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2) = 0.1 + 0.15 - 0.05 = \underline{\underline{0.20}}$

b) $P(F_1 - F_2) = P(F_1) - P(F_1 \cap F_2) = 0.1 - 0.05 = \underline{\underline{0.05}}$

c) $P(F_2 - F_1) = P(F_2) - P(F_1 \cap F_2) = 0.15 - 0.05 = \underline{\underline{0.1}}$

d) $P(F_1 \oplus F_2) =$ (som i föregående uppgift) $= P(F_1 - F_2) + P(F_2 - F_1)$

$= 0.05 + 0.1 = \underline{\underline{0.15}}$

9.4.1. Tre kort tas från en kortlek utan återläggning. Beräkna sannolikheten att

a) alla tre kort är hjärter

b) inget av korten är hjärter

c) alla tre kort har samma färg

d) alla tre kort är av valören 10.

Alla lösningar bygger på att sannolikheten blir $\frac{m}{n}$

m = antalet gynnsamma utfall

n = totala antalet utfall

a) n = totala antalet sätt att ta 3 kort från $52 = \binom{52}{3}$

m = antalet sätt att ta 3 kort från $13 = \binom{13}{3}$ (13 hjärter)

den sökta sannolikheten i a) är

$$\frac{m}{n} = \frac{\binom{13}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{\frac{13!}{10!\cdot 3!}}{\frac{52!}{49!\cdot 3!}} = \frac{13\cdot 12\cdot 11}{52\cdot 51\cdot 50} = \frac{11}{17\cdot 50} \approx \underline{\underline{0.0129}}$$

b) $n = \binom{52}{3}$ m = antalet sätt att ta 3 från $39 = \binom{39}{3}$ (39 icke-hjärter)

$$\frac{m}{n} = \frac{\binom{39}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{\frac{39!}{36!\cdot \cancel{3!}}}{\frac{52!}{49!\cdot \cancel{3!}}} = \frac{39\cdot 38\cdot 37}{52\cdot 51\cdot 50} = \frac{38\cdot 37}{4\cdot 17\cdot 50} = \frac{19\cdot 37}{17\cdot 100} \approx \underline{\underline{0.414}}$$

c) Denna sannolikhet blir bara $4\cdot$ sannolikheten i a) eftersom m blir precis 4 gånger större. Så svaret är $\underline{\underline{\frac{11}{17\cdot 13}}} \approx \underline{\underline{0.05}}$

d) m = antalet sätt att ta 3 st 10:or som är $\binom{4}{3}$

$n = \binom{52}{3}$ som förut så den sökta sannolikheten

är $\binom{4}{3}/\binom{52}{3} = \frac{\frac{4!}{3!\cdot 1!}}{\frac{52!}{49!\cdot 3!}} = \frac{4\cdot 3!}{52\cdot 51\cdot 50} = \frac{1\cdot 1\cdot 1}{13\cdot 17\cdot 25} = \underline{\underline{\frac{1}{13\cdot 17\cdot 25}}} \approx \underline{\underline{0.0002}}$

9.4.2. Antal sätt att dra 3 kort utan återläggning av 52 möjliga = $n = \binom{52}{3}$. Antal sätt att välja 3 kort i numerär följd i intervallet 2–10 är, om vi inte räknar med kombinationsmöjligheter för vilka färger korten är i, 7 eftersom de är 2-3-4, 3-4-5, 4-5-6, 5-6-7, 6-7-8, 7-8-9, 8-9-10. För varje sådan kombination finns $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ kombinationsmöjligheter för färgval. Exempelvis kan vi ha 2-3-4 med hjärter-ruter-klöver, eller klöver-spader-spader osv. Enligt multiplikationsprincipen blir $m = 7 \cdot 64$ och den sökta sannolikheten blir

$$\frac{m}{n} = \frac{7 \cdot 4^3}{\binom{52}{3}} = \frac{7 \cdot 4^3}{\frac{52 \cdot 51 \cdot 50}{3!}} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 4^3}{52 \cdot 51 \cdot 50} = \frac{7 \cdot 4^3}{26 \cdot 17 \cdot 50} = \frac{7 \cdot 16}{13 \cdot 17 \cdot 25} \approx 0.02$$

9.4.3. Den här uppgiften löses på samma sätt som den föregående med skillnaden att vi nu inte har lika många kombinationsmöjligheter för färgval: Alla kort ska vara av samma färg så faktorn i m blir 4, inte 4^3 och svaret blir då $\frac{m}{n}$ = samma räkningar med två 4:or mindre $= \frac{7}{13 \cdot 17 \cdot 25} \approx 0.0013$

9.4.4. Totalt antal utfall vid kast med tre sexsidiga tärningar = $= n = 6^3$.

a) Totalt antal utfall där tre tärningar kastas där alla visar lika $= m = 6$ (alla 1:or, 2:or, ..., 6:or – 6 fall)

Sökt sannolikhet $= \frac{m}{n} = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$

b) Totalt antal utfall där tre tärningar kastas där alla visar olika $= m = 6 \cdot 5 \cdot 4$ (1:a tärningens utfall kan väljas fritt, 6 möjligheter, 2:a tärningens utfall kan inte vara = 1:a, 5 möjligheter och sista tärningen får 4 möjliga utfall)

Sökt sannolikhet $= \frac{m}{n} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{5}{9} \approx 0.55$

9.4.5.

Urna →  fem vita kulor och två svarta. Två kulor dras
sökt: Sannolikheten att de har olika färg.

a) Dragningen sker utan återläggning.
Antal sätt att få kulor av olika färg $= m = 2 \cdot 5$ (Multiplikations-principen, 2 svarta att välja på och 5 vita.)
Antal sätt att ta 2 kulor av 7 över huvudtaget $= n = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$
Sökt sannolikhet $= \frac{m}{n} = \frac{2 \cdot 5}{21} = \frac{10}{21} \approx 0.48$

b) Dragningen sker med återläggning.
Talen m och n måste båda beräknas antingen med hänsyn tagen till ordningsföljden eller utan hänsyn tagen till ordningsföljden. I a)-uppgiften hade vi ingen hänsyn till ordningsföljden, men i b) behövs det. Så

$n =$ antal sätt att ta 2 kulor med återläggning med hänsyn tagen till ordningsföljden blir $7 \cdot 7$ (mult. principen.)

$m =$ antal sätt att ta 2 kulor med återläggning med hänsyn tagen till ordningsföljden blir $\underbrace{2 \cdot 5}_{\text{svarta först}} + \underbrace{5 \cdot 2}_{\text{vita först}} = 20$

Sökt sannolikhet: $\frac{m}{n} = \frac{20}{49} \approx 0.41$

9.4.6. Totalt antal möjliga tipsrader $= n = 3^{13}$

a) Antal sätt att skapa rätt tipsrad $= m = 1$. Sökt sannolikhet $= \frac{m}{n} = \frac{1}{3^{13}}$

b) Antal sätt att tippa fel på (bara) sista raden $= m = 2$. Sökt sannolikhet $= \frac{m}{n} = \frac{2}{3^{13}}$.

c) Antal sätt att tippa fel på någon rad $= m = 13 \cdot 2$. Sökt sannolikhet $= \frac{m}{n} = \frac{13 \cdot 2}{3^{13}}$.

d) Antal sätt att tippa fel på alla rader utom 1 $= m = 13 \cdot 2^{12}$.
Sökt sannolikhet $= \frac{m}{n} = \frac{13 \cdot 2^{12}}{3^{13}}$.

9.4.7. Antal sätt att få ess, kung, dam, knekt, 10 i samma färg $= m = 4$
Antal sätt att få fem kort, vilka som helst $= n = \binom{52}{5}$. Sökt sannolikhet $= \frac{n}{m} = \frac{4}{\binom{52}{5}} = \frac{\cancel{4}}{\frac{52\cdot 51\cdot \cancel{50}\cdot 49\cdot \cancel{48}}{\cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}}} = \underline{\underline{\frac{1}{52\cdot 51\cdot 5\cdot 49}}}$

Alternativ lösning: (Kommer i en framtida version)

9.4.8. Antal sätt att få 10 kort, vilka somhelst $= n = \binom{52}{10}$.
Antal sätt att få 2 spader, 3 hjärter, 1 ruter och 4 klöver blir enligt multiplikationsprincipen $= \binom{13}{2}\cdot\binom{13}{3}\cdot\binom{13}{1}\cdot\binom{13}{4} = m$.
Sökt sannolikhet $= \frac{m}{n} =$

$$\frac{\binom{13}{2}\cdot\binom{13}{3}\cdot\binom{13}{1}\cdot\binom{13}{4}}{\binom{52}{10}} = \frac{\frac{\cancel{13}\cdot 12}{\cancel{2}}\cdot\frac{13\cdot 12\cdot 11}{\cancel{3\cdot 2}}\cdot 13\cdot\frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{\cancel{4!}}}{\frac{\cancel{52}\cdot 51\cdot \cancel{50}\cdot \overset{7}{\cancel{49}}\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot \overset{5}{\cancel{45}}\cdot 44\cdot 43}{\cancel{10}\cdot\cancel{9}\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4!}}} =$$

$$= \frac{\cancel{12}\cdot 13\cdot \overset{\cancel{2}\cdot 6}{\cancel{12}}\cdot 11\cdot 13\cdot 13\cdot \cancel{12}\cdot\cancel{11}\cdot\cancel{10}}{\underset{17\cdot\cancel{3}}{51}\cdot 7\cdot \underset{\cancel{4}\cdot\cancel{12}}{\cancel{48}}\cdot 47\cdot 46\cdot \cancel{5}\cdot \underset{\cancel{4}\cdot\cancel{11}}{\cancel{44}}\cdot 43} = \frac{13^3\cdot \overset{3}{\cancel{6}}\cdot 11\cdot}{17\cdot 7\cdot 47\cdot \underset{23}{\cancel{46}}\cdot 43} = \underline{\underline{\frac{13^3\cdot 3\cdot 11}{17\cdot 7\cdot 47\cdot 23\cdot 43}}} \approx \underline{\underline{0.0131}}$$

9.5.1. Vid kast med två tärningar vad är sannolikheten att summan är jämn givet att summan är ≥ 10?

Inför två händelser:

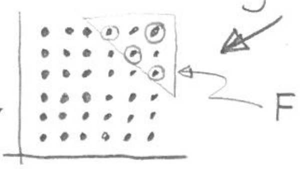
E = summan är jämn, F = summan är ≥ 10.

De 36 utfallen för 2 tärningar

sökt sannolikhet är

$E \cap F$ = de som är inringade $\rightarrow \odot$

$$P(E|F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)}$$



$$P(E\cap F) = \frac{4}{36} \quad P(F) = \frac{6}{36}$$

sökt sannolikhet är alltså $\dfrac{\frac{4}{36}}{\frac{6}{36}} = \dfrac{4}{6} = \underline{\underline{\dfrac{2}{3}}}$ $\left(\approx \underline{\underline{0.66}}\right)$

9.5.2. Om vi singlar ett mynt tre gånger vad är sannolikheten att två singlingar i rad är krona givet att det blir ett jämnt antal krona?

Inför två händelser

E = två singlingar i rad är krona

F = jämnt antal krona

Varje enskilt utfall med 3 slantsinglingar har den individuella sannolikheten $1/8$. (000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, 1 = klave 0 = krona)

Sökt sannolikhet är $P(E|F) = \dfrac{P(E\cap F)}{P(F)} = \dfrac{2\cdot\frac{1}{8}}{2\cdot\frac{1}{8}}$ (001 och 100)

$= \underline{\underline{1}}$. Detta inträffar alltså alltid! Och om vi tänker igenom formuleringen så inser vi att "jämnt antal krona" måste ge "två krona i rad" som följd.

9.5.3. Beteckna frågorna med f_1, f_2 och f_3 och inför händelserna

F_i = studenten svarar rätt på fråga f_i, $i = 1, 2, 3$.

(Frågan löses i nästa avsnitt.)

AVSNITT: 5 UPPGIFTER: 9.5.4, 9.5.5

9.5.4. $\boxed{\text{UPPSALA}}$ Om två likadana bokstäver faller ner, så är det klart att apan med 100% säkerhet sätter upp dem rätt igen. Det är fallet om de båda P:na eller A:na faller ner. Annars är det 50% sannolikhet att det blir rätt. Inför alltså händelsen

E = det är P:na eller A:na som faller ner

$E \cup E^c$ utgör en partionering av utfallsrummet och enligt lagen om total sannolikhet har vi

$$P(A) = P(E) \cdot P(A|E) + P(E^c) \cdot P(A|E^c)$$

där A = apan sätter upp bokstäverna rätt. P(A) är alltså den sannolikhet vi söker. Enligt utredningen ovan gäller

$$P(A|E) = 1 \quad \text{respektive} \quad P(A|E^c) = 0.5$$

så det återstår att finna $P(E)$ och $P(E^c)$.

n = antal sätt att välja ut 2 bokstäver från 7 = $\binom{7}{2}$

m = antal sätt att välja 2 bokstäver av de 7 som är lika = n = 2 (för vi kan bara ta A:na eller P:na)

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{2}{\binom{7}{2}} = \frac{2}{\frac{7 \cdot 6}{2}} = \frac{2}{21} \Rightarrow P(E^c) = \frac{19}{21}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{2}{21} \cdot 1 + \frac{19}{21} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4+19}{42} = \underline{\underline{\frac{23}{42}}} \approx \underline{\underline{0.55}}$$

9.5.5. $P(A \cap B \cap C) = 0.1$, $P(A) = 0.5$, $P(B|A) = 0.4$

$$\Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0.4 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.4 \cdot P(A) = 0.4 \cdot 0.5 = \underline{0.2}$$

$$\Rightarrow P(C|A \cap B) = \frac{P(C \cap A \cap B)}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} =$$

$$= \frac{0.1}{0.2} = \underline{\underline{0.5}}$$

9.5.6. Inför händelser: (vi väljer en enhet och undersöker den.)

E = en defekt enhet har valts, $P(E) = 0.1 \Rightarrow P(E^c) = 0.9$

F = enheten klassificeras som defekt. Texten ger

$P(F|E) = 0.9 \quad P(F^c|E^c) = 0.85 \Rightarrow P(F|E^c) = 1 - 0.85 = 0.15$.

Sökt: $P(E|F)$

Vi har alltid sambandet $P(E|F) \cdot P(F) = P(F|E) \cdot P(E) \quad (= P(E \cap F))$

Så $P(E|F) = \frac{P(F|E) \cdot P(E)}{P(F)} = \frac{0.9 \cdot 0.1}{P(F)}$ och $P(F) = \underbrace{P(F|E)}_{0.9} \cdot \underbrace{P(E)}_{0.1} + \underbrace{P(F|E^c)}_{0.15} \cdot \underbrace{P(E^c)}_{0.9}$

$$\Rightarrow P(E|F) = \frac{0.9 \cdot 0.1}{0.9 \cdot 0.1 + 0.15 \cdot 0.9} = 40\%$$

9.5.7. Inför händelser:

S = en person har en viss sjukdom

T = ett test visar ett positivt resultat.

Givet i texten: $P(T|S) = 0.99$, $P(T^c|S^c) = 0.95$, $P(T) = 0.06$

a) Beräkna $P(S)$.

$$P(T|S) = \frac{P(T \cap S)}{P(S)} = 0.99 \qquad P(T^c|S^c) = \frac{P(T^c \cap S^c)}{P(S^c)} = 0.95$$

$$P(T^c \cap S^c) = P((S \cup T)^c) = 1 - P(S \cup T) = 1 - (P(S) + P(T) - P(S \cap T))$$

$P(T \cap S) = 0.99 P(S)$ och $(1 - (P(S) + P(T) - P(T \cap S)) = 0.95 \cdot P(S^c)$:

$$\Rightarrow 1 - P(S) - \underbrace{P(T)}_{0.06} + 0.99 \cdot P(S) = 0.95(1 - P(S)) \Leftrightarrow$$

$$0.95 - 0.01 P(S) = 0.95 - 0.95 P(S) \Rightarrow \underline{P(S) = 0.01}.$$

b) Beräkna $P(S|T)$.

Vi har alltid sambandet $P(S|T) \cdot P(T) = P(T|S) \cdot P(S) \Rightarrow$

$$P(S|T) = \frac{P(T|S) \cdot P(S)}{P(T)} = \frac{0.99 \cdot 0.01}{0.06} = 0.165 = 16.5\%$$

AVSNITT: 5 UPPGIFTER: 9.5.8, 9.5.9

9.5.8. Inför händelser

E = minst två krona

F = ett av utfallen är klave

Singling av tre mynt:
000 001 010 011 100 101 110 111
(0 = krona 1 = klave)

a) $P(E) = \frac{m}{n}$, m = antalet sätt att få (minst) två krona = 4
n = totala antalet utfall = 8

$P(E) = \frac{4}{8}$ (= 50%)

b) $P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$

$E \cap F$ är utfallen 001, 010 och 100
$\Rightarrow P(E \cap F) = \frac{3}{8}$
F är alla utom 000 $\Rightarrow P(F) = \frac{7}{8}$

$\Rightarrow P(E|F) = \frac{3/8}{7/8} = \frac{3}{7}$

9.5.9. Inför händelserna AF = A försöker, BF = B försöker och CF = C försöker. Enligt texten partitionerar dessa händelser utfallsrummet och $P(AF) = 0.25$, $P(BF) = 0.30$ och $P(CF) = 0.45$. Om vi också inför händelsen E = X blir korrekt utförd så säger texten $P(E|AF) = 0.90$, $P(E|BF) = 0.80$ och $P(E|CF) = 0.70$.

a) Sökt sannolikhet är P(E). Lagen för total sannolikhet ger

$$P(E) = \underbrace{P(E|AF)}_{0.90} \cdot \underbrace{P(AF)}_{0.25} + \underbrace{P(E|BF)}_{0.80} \cdot \underbrace{P(BF)}_{0.30} + \underbrace{P(E|CF)}_{0.70} \cdot \underbrace{P(CF)}_{0.45} = 0.78$$

b) Sökt sannolikhet är $P(E^c) = 1 - P(E) = 1 - 0.78 = 0.22$

c) Sökt sannolikhet $P(AF|E) = P(E|AF) \cdot P(AF)/P(E) = 0.9 \cdot 0.25/0.78 \approx 0.29$

d) Sökt sannolikhet $P(CF|E) = P(E|CF) \cdot P(CF)/P(E) = 0.70 \cdot 0.45/0.78 \approx 0.40$

e) Sökt sannolikhet $P(AF|E^c) = \underbrace{P(E^c|AF)}_{0.10} \cdot \underbrace{P(AF)}_{0.25} / \underbrace{P(E^c)}_{0.22} = \frac{0.025}{0.22} \approx 0.11$

f) Sökt sannolikhet $P(CF|E^c) = \underbrace{P(E^c|CF)}_{0.30} \cdot \underbrace{P(CF)}_{0.45} / \underbrace{P(E^c)}_{0.22} = \frac{0.30 \cdot 0.45}{0.22} =$

≈ 0.61

AVSNITT: 6 UPPGIFTER: 9.6.1, 9.6.2, 9.6.3, 9.6.4, 9.6.5

9.6.1. $P(A) = 0.1$, $P(B) = 0.05$, $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$. (A & B oberoende).

Sökt sannolikhet: $P(A^c \cap B^c) = P((A\cup B)^c) = 1 - P(A\cup B) =$

$$= 1 - (P(A)+P(B)-P(A\cap B)) = 1 - (\underbrace{0.1+0.05-0.1\cdot 0.05}_{0.15-0.005=0.145}) = \underline{\underline{0.855}}$$

A^c och B^c är oberoende eftersom A och B är oberoende.
(Kan också beräknas gm $P(A^c\cap B^c) = P(A^c)\cdot P(B^c) = (1-0.1)\cdot(1-0.05)$)

9.6.2. $P(A) > 0$, $P(B) > 0$

a) Om $A\cap B = \emptyset$ kan de vara oberoende? $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$?

<u>Nej</u>, ty då skulle $0 = P(\emptyset) = P(A\cap B) = \underbrace{P(A)}_{>0}\cdot\underbrace{P(B)}_{>0} \neq 0$

b) Om $P(A)\cdot P(B) = P(A\cap B)$, kan $A\cap B = \emptyset$?

<u>Nej</u>, av samma skäl.

9.6.3. $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$, $P(A\cup B) = 0.6$.

$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ ger $P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A\cup B) =$
$= 0.3+0.4-0.6 = 0.1$. Men $P(A)\cdot P(B) = 0.3\cdot 0.4 = 0.12 \neq 0.1$ så händelserna A och B är <u>inte</u> oberoende. (Men det var nära.)

9.6.4. A & B oberoende och $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$.

a) sökt sannolikhet $= P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) = 0.2\cdot 0.3 = \underline{0.06}$

b) sökt sannolikhet $= P(A^c\cap B^c) = P((A\cup B)^c) =$
$= 1 - (P(A\cup B)) = 1 - (P(A)+P(B)-P(A\cap B)) =$
$= 1 - (P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)\cdot P(B)$
$= 1 - 0.2 - 0.3 + 0.06 = \underline{\underline{0.56}}$

(Kan också beräknes enklare gm $P(A^c\cap B^c) = P(A^c)\cdot P(B^c) = (1-0.2)\cdot(1-0.3)$.)

c) $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B) = 0.2+0.3-0.06 = \underline{\underline{0.44}}$

d) $P(A\oplus B) = P((A-B)\cup(B-A)) = P(A-B)+P(B-A) =$
$= P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B) = 0.2-0.06+0.3-0.06 = 0.5-0.12 = \underline{\underline{0.38}}$

9.6.5.

a) $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

b) $P(A^c\cap B^c) = 1 - P(A) - P(A) + P(A)P(B)$
$= (1-P(A))\cdot(1-P(B))$

c) $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$

d) $P(A\oplus B) = P(A)+P(B)-2\cdot P(A)\cdot P(B)$

9.6.6. A, B, C parvis oberoende. $P(A) = 0.1$, $P(B) = 0.2$, $P(C) = 0.3$.

a) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A) \cdot P(B) - P(A) \cdot P(C) - P(B) \cdot P(C) + P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) =$

$= 0.1 + 0.2 + 0.3 - 0.1 \cdot 0.2 - 0.1 \cdot 0.3 - 0.2 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.3 =$

$= 0.6 - 0.02 - 0.03 - 0.06 + 0.006 = 0.6 - 0.11 + 0.006 = \underline{\underline{0.496}}$

b) $P(A \cup B \cup C) = 1 - P((A \cup B \cup C)^c) = 1 - P(A^c \cap B^c \cap C^c) =$

$= 1 - \underbrace{P(A^c)}_{0.9} \cdot \underbrace{P(B^c)}_{0.8} \cdot \underbrace{P(C^c)}_{0.7} = 1 - 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.7 = \underline{\underline{0.496}}$

c) $P(A \mid B \cup C) = \dfrac{P(A \cap (B \cup C))}{P(B \cup C)} = \dfrac{P((A \cap B) \cup (A \cap C))}{P(B \cup C)}$

$P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(\underbrace{(A \cap B) \cap (A \cap C)}_{= A \cap B \cap C}) =$

$= P(A) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0.1 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.3 - 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.3$

$= 0.02 + 0.03 - 0.006 = \underline{\underline{0.044}}$

$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = P(B) + P(C) - P(B) \cdot P(C) =$

$= 0.2 + 0.3 - 0.2 \cdot 0.3 = 0.5 - 0.06 = \underline{0.44}$

Alltså blir $P(A \mid B \cup C) = \dfrac{0.044}{0.44} = \underline{\underline{0.1}}$.

9.1. Sökt sannolikhet $P(A \cap B \mid A \cup B)$, $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$. A, B, ober.

$$P(A \cap B \mid A \cup B) = \frac{P(A \cap B \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.4 \cdot 0.5 = \underline{0.2}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{= P(A) \cdot P(B)} = 0.4 + 0.5 - 0.2 = \underline{0.7}$$

Alltså är den sökta sannolikheten lika med $0.2/0.7 = \underline{\underline{\frac{2}{7}}}$

9.2. 

U_1 U_2

En okänd kula flyttas från U_1 till U_2 sedan dras en kula från U_2.

Inför händelser V = den dragna kulan var vit och S = den flyttade kulan var svart. Sökt sannolikhet: $P(S|V)$

Vi har $P(S|V) = \underbrace{P(V|S)}_{\frac{2}{5} = 0.4} \cdot \frac{P(S)}{P(V)}$ $\leftarrow \frac{2}{5} = 0.4$ $= \underline{0.4 \cdot \frac{0.4}{P(V)}}$ ⊗

Nu kan vi inte beräkna $P(V)$ på en gång eftersom den kan inträffa på två sätt:

$$P(V) = \underbrace{P(V|S)}_{0.4} \cdot \underbrace{P(S)}_{0.4} + \underbrace{P(V|S^c)}_{0.6} \cdot \underbrace{P(S^c)}_{0.6} = \overbrace{0.4 \cdot 0.4}^{0.16} + \overbrace{0.6 \cdot 0.6}^{0.36} = \underline{0.52}$$

här var den flyttade kulan svart och då hade U_2 3 svarta och 2 vita sannol. $= \frac{2}{5} = 0.4$

här var den flyttade kulan vit och då hade U_2 2 svarta och 3 vita. sannol $= \frac{2}{5} = 0.6$

Alltså är $P(S|V) = 0.4 \cdot \frac{0.4}{0.52} = \underline{\underline{\frac{0.16}{0.52}}} \approx \underline{\underline{0.308}}$

Vi kan uppfatta detta som en tillämpning av Baye's sats där $H_1 = S$ = den flyttade kulan var svart, $H_2 = S^c$ = den flyttade kulan var vit och sannolikheten i ⊗ beräknades som

$$P(S|V) = P(H_1|V) = \frac{P(H_1) \cdot P(V|H_1)}{P(V|H_1) \cdot \underbrace{P(H_1)}_{P(S)} + P(V|H_2) \cdot \underbrace{P(H_2)}_{P(S^c)}}$$

(se boken sid 17.)

9.3. Ur en vanlig kortlek dras 3 kort utan återläggning. Om de 2 första korten är spader, vad är sannolikheten att det tredje a) är spader b) inte är spader.

För att beräkna detta på ett lite mer intressant sätt, inför händelserna

E = de första två korten är spader
F = det tredje är spader.
G = alla tre är spader

a) Sökt sannolikhet $= P(F|E) = \dfrac{P(F \cap E)}{P(E)} = \dfrac{P(G)}{P(E)}$

$P(G) = \dfrac{m}{n}$, m = antal sätt att välja 3 spader $= \binom{13}{3}$

n = antal sätt att välja 3 kort vilka som helst $= \binom{52}{3}$

$$P(G) = \frac{\binom{13}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{\frac{13\cdot12\cdot11}{3\cdot2\cdot1}}{\frac{52\cdot51\cdot50}{3\cdot2\cdot1}} = \frac{\cancel{13}\cdot\overset{4}{\cancel{12}}\cdot11}{\underset{4}{\cancel{52}}\cdot\underset{17}{\cancel{51}}\cdot50} = \underline{\frac{11}{17\cdot50}}$$

$$P(E) = \frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{\frac{13\cdot12}{1\cdot2}}{\frac{52\cdot51}{1\cdot2}} = \frac{13\cdot4\cdot3}{52\cdot17\cdot3} = 1/17$$

Sökt sannolikhet $= \dfrac{P(G)}{P(E)} = \dfrac{\frac{11}{17\cdot50}}{\frac{1}{17}} = \underline{\underline{\dfrac{11}{50}}} = \underline{\underline{0.22\ (22\%)}}$

b). Att det tredje kortet inte är ett spader (fortfarande givet att de första två är spader) är komplementhändelsen, så den sökta sannolikheten blir $1 - \dfrac{11}{50}$ $= \dfrac{39}{50}$ (= 78%).

Anmärkning: Det här problemet kan lösas på ett enklare sätt: Vi kan se det som att vi söker sannolikheten att från 50 kort dra ett spader, att de två första korten är dragna och är spader innebär att bland de 50 återstående korten finns 11 spader. Den sökta sannolikheten i a) är alltså $\dfrac{11}{50}$ som förstås stämmer med svaret i a). Detta kallas att vi "inskränker utfallsrummet" och blir ett sätt att närmare illustrera betingad sannolikhet.

9.4. Ur en vanlig kortlek dras 3 kort utan återläggning. Om de två första korten inte är ess, vad är sannolikheten att det tredje kortet a) är ett ess? b) inte är ett ess?

Återigen inför vi händelser för att kunna uttrycka oss klart:

E = de två första korten är inte ess

F = det tredje är ett ess

a) Sökt sannolikhet $= P(F|E) = \dfrac{P(F\cap E)}{P(E)}$

$P(F\cap E) = \frac{m}{n}$, där m = antalet sätt att välja två kort som inte är ess från en kortlek och sedan välja ett ess $= 48\cdot 47\cdot 4$.

Nu räknar vi med ordningen så n får beräknas som $52\cdot 51\cdot 50$ = antal sätt att välja 3 kort vilka som helst. (Ordningen medräknad)

Alltså blir $P(F\cap E) = \dfrac{\overset{16}{\cancel{48}}\cdot 47\cdot\cancel{4}}{\underset{13}{\cancel{52}}\cdot\underset{17}{\cancel{51}}\cdot 50} = \underline{\dfrac{16\cdot 47}{13\cdot 17\cdot 50}}$

$P(E) = \frac{m}{n}$, där m = antalet sätt att välja två kort som inte är ess $= 48\cdot 47$, n = antal sätt att välja 2 kort vilka som helst $= 52\cdot 51$

Alltså blir $P(E) = \dfrac{48\cdot 47}{52\cdot 51} = \dfrac{16\cdot 47}{52\cdot 17}$ och den sökta sannolikheten

$$P(F|E) = \frac{\dfrac{\cancel{16\cdot 47}}{13\cdot\cancel{17}\cdot 50}}{\dfrac{\cancel{16\cdot 47}}{52\cdot\cancel{17}}} = \frac{52}{13\cdot 50} = \frac{4}{50} = \underline{\underline{\frac{2}{25}}}$$

b) Sökt sannolikhet $= 1 - P(F|E) = \underline{\underline{\dfrac{23}{25}}}$

Anm: detta kan också studeras med "inskränkt utfalls-rum som i 9.3

9.5. Ur en vanlig kortlek dras 3 kort utan återläggning. Om det 3:e kortet är ett ess, vad är sannolikheten att

a) det finns minst ett ess bland de två första korten,

b) det finns exakt ett ess bland de två första korten,

c) det inte finns något ess bland de två första korten.

Som vanligt är det viktigaste att införa bra beskrivande händelser. Vi inför

E = det tredje kortet är ett ess

F = det finns minst ett ess bland de två första korten

G = det finns exakt ett ess bland de två första korten

H = det finns inte något ess bland de två första korten

I a) söks $P(F|E) = \frac{P(F\cap E)}{P(E)}$

$P(F\cap E) = \frac{m}{n}$, där m = antalet sätt att välja 3 kort, de två första har minst ett ess och det sista ska vara ett ess. Vi beräknar m som $m_1 + m_2 + m_3$

m_1 = antal sätt att välja 3 ess: $4\cdot 3\cdot 2$

m_2 = antal sätt att välja 2 ess med det första varandes icke-ess: $48\cdot 4\cdot 3$

m_3 = antal sätt att välja 2 ess med det andra varandes icke-ess: $4\cdot 48\cdot 3$

$m = m_1 + m_2 + m_3 = 4\cdot 3\cdot 2 + 48\cdot 4\cdot 3 + 4\cdot 48\cdot 3 = 4\cdot 3\cdot 98 = \underline{2\cdot 3\cdot 4\cdot 49}$

n = totalt antal sätt att välja vilka tre kort som helst $= 52\cdot 51\cdot 50$

och $P(F\cap E) = \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 49}{52\cdot 51\cdot 50} = \frac{49}{13\cdot 17\cdot 25}$

$P(E) = \frac{m}{n}$, där m = antal sätt att välja ett ess på sista plats och sedan två andra kort på 1:a & 2:a plats $= 4\cdot 51\cdot 50$

n = antal sätt att välja 3 kort vilka som helst $= 52\cdot 51\cdot 50$

$\Rightarrow P(E) = \frac{4\cdot 51\cdot 50}{52\cdot 51\cdot 50} = \frac{1}{13} \Rightarrow \frac{P(F\cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{49}{13\cdot 17\cdot 25}}{\frac{1}{13}} = \underline{\underline{\frac{49}{17\cdot 25}}} \approx 0.12$

forts ↘

9.5. (forts.)

b) Här är det samma räkningar som i a), men nu söker vi $P(G|E) = \frac{P(G \cap E)}{P(E)}$ och då får vi nästan samma m vid beräkning av $P(G \cap E) = \frac{m}{n}$, men nu har vi $m = m_2 + m_3 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 48$,

$n = 52 \cdot 51 \cdot 50$ och $P(G \cap E) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 48}{52 \cdot 51 \cdot 50} = \frac{48}{13 \cdot 17 \cdot 25}$

och $\frac{P(G \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{48}{13 \cdot 17 \cdot 25}}{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{\frac{48}{17 \cdot 25}}} \approx 0.113$

c) Eftersom $H|E$ är komplementärhändelsen till $F|E$ så blir den sökta sannolikheten $P(H|E)$ helt enkelt

$1 - P(F|E) = 1 - \frac{49}{17 \cdot 25} = \frac{17 \cdot 25 - 49}{17 \cdot 25} = \underline{\underline{\frac{376}{17 \cdot 25}}} \approx \underline{0.88}$

9.6. Inför händelserna E = enheten kommer från A och F = enheten fungerar. Lagen om total sannolikhet ger oss då möjligheten att teckna den sökta sannolikheten i a) som

$$P(F) = \underbrace{P(F|E)}_{0.99} \cdot \underbrace{P(E)}_{0.30} + \underbrace{P(F|E^c)}_{0.95} \cdot \underbrace{P(E^c)}_{0.70} = \underline{\underline{0.962}}$$

b) Företagsledningen vill att denna sannolikhet når 0.97 och om vi då betecknar med x andelen enheter som framställs i fabriken A och $1-x$ andelen enheter som framställs i B så får vi ekvationen

$$P(F|E) \cdot x + P(F|E^c)(1-x) \geqslant 0.97, \text{ alltså}$$

$$0.99x + 0.95(1-x) \geqslant 0.97 \Leftrightarrow 0.04 \cdot x \geqslant 0.02 \Leftrightarrow$$

$\underline{x \geqslant 0.5}$ så A-fabriken bör framställa åtminstone hälften av enheterna.

9.7. En urna har 4 sorters kulor, 10 blå och 10 gula, en blå kula har ett hål så att den kan träs upp på en tråd och även en gul kula har denna egenskap. En kula dras ur urnan.

a) Inför händelsen A = "den dragna kulan är blå" och B = "den dragna kulan har ett hål". Dessa händelser har

$$P(A) = \frac{10}{20} = 0.5 \quad \text{och} \quad P(B) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

och $P(A \cap B)$ = "den dragna kulan är blå med hål" har $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$.

Eftersom $P(A) \cdot P(B) = \frac{10}{20} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20} = P(A \cap B)$ så är dessa händelser oberoende.

b) Vi tar nu bort hälften av de gula kulorna men den med hål får vara kvar. Vi har nu

$$P(A) = \frac{10}{15} \quad \text{och} \quad P(B) = \frac{2}{15}$$

och $P(A \cap B) = \frac{1}{15}$ och

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{10}{15} \cdot \frac{2}{15} = \frac{2 \cdot 2}{15 \cdot 3} = \frac{4}{45} \neq \frac{1}{15} = P(A \cap B)$$

så dessa händelser är inte oberoende, även fast vi inte tagit bort några blå kulor eller kulor med hål.