Tentamen 2020-01-13, 8:00-12:00

Institutionen för Matematik
SF1632 Differentialekvationer och transformer Ten2
13e Januari 2019
Examinator: John Andersson

Endast skrivdon (penna, linjal, gradskiva et.c.) är tillåtna. Specifikt så är miniräknare och formelsammling inte tillåtna.

Motivera alla dina lösningar om inget annat anges.

Preliminära betygsgränser: E: 12p, D: 14p, C: 16p, B: 19p, A: 21p.

Del 1.

Uppgift 1a. Definiera inre produkten i $L^2([0,2], w(x))$ där $w(x) = 1 + x$.

[1 poäng]

b) Hitta det förstagradspolynom $p(x)$ som minimerar

$$\int_0^2 |p(x) - x^2|^2 (1+x)dx.$$

[3 poäng]

Lösningsförslag Fråga 1a: Den inre produkten definieras som[1]

$$(f, g) = \int_0^1 (f(x)g(x))(1+x)dx.$$

b)[2] Vi börjar med att sätta e_0 som en konstant enhetsvektor

$$e_0(x) = \frac{1}{\|1\|} = \left(\int_0^2 (1+x)dx\right)^{-1/2} = \frac{1}{2}.$$

Sen hittar vi ett förstagradspolynom som är orthogonalt mot e_0. För detta så definierar vi (via Gram-Schmidt)

$$v_1(x) = x - (x, e_0)e_0 = x - \int_0^2 (x \cdot \frac{1}{2})(1+x)dx \cdot \frac{1}{2} = x - \frac{7}{6},$$

då är $v_1(x)$ orthogonal mot e_0. Vi normaliserar $v_1(x)$ för att få en normaliserad vektor

$$e_1(x) = \frac{v_1(x)}{\|v_1\|} = \frac{x - \frac{7}{6}}{\left(\int_0^2 \left(x - \frac{7}{6}\right)^2 (x+1)dx\right)^{1/2}} = \frac{6x-7}{2\sqrt{11}}$$

Vi får därför att

$$p(x) = (e_0, x^2)e_0 + (e_1, x^2)e_1 =$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{2}x^2(1+x)dx\frac{1}{2} + \int_0^2 \frac{6x-7}{2\sqrt{11}}x^2(1+x)dx\frac{6x-7}{2\sqrt{11}} =$$

[1] Om man betraktar komplexvärda funktioner så skall det vara ett konjugat på g i integralen. Här är uppgiften realvärd så vi behöver inget konjugat. Båda svaren ger poäng.

[2] Eftersom alla integraler i den här uppgiften är polynom så kommer jag inte skriva ut beräkningen av ntegralerna.

$$= \frac{10}{3}\frac{1}{2} + \frac{118}{15\sqrt{11}}\frac{6x-7}{2\sqrt{11}}.$$

Vi förenklar inte det sista uttrycket eftersom det ofta är fördelaktigt att behålla en funktion uttryckt i en ortogonal bas.

Uppgift 2a) Beräkna fouriertransformen av

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{om } |x| < 1 \\ 0 & \text{om } |x| \geq 1. \end{cases}$$

[3 poäng]

b) Beräkna integralen

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^4 dx.$$

[1 poäng]

Lösningsförslag uppgift 2a): För att beräkna fouriertransformen så använder vi definitionen

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\omega x}dx = \int_0^1 (1-x)e^{-i\omega x}dx + \int_{-1}^0 (1+x)e^{-i\omega x}dx =$$

$$= \frac{-1}{i\omega}\int_0^1 (1-x)\frac{de^{-i\omega x}}{dx}dx - \frac{1}{i\omega}\int_{-1}^0 (1+x)\frac{de^{-i\omega x}}{dx}dx =$$

$$= \frac{-1}{i\omega}\left[(1-x)e^{-i\omega x}\right]_0^1 - \frac{1}{i\omega}\int_0^1 e^{-i\omega x}dx - \frac{1}{i\omega}\left[(1+x)e^{-i\omega x}\right]_{-1}^0 + \frac{1}{i\omega}\int_{-1}^0 e^{-i\omega x}dx =$$

$$= \frac{2-e^{-i\omega}-e^{i\omega}}{\omega^2} = 4\frac{\sin^2(\omega/2)}{\omega^2},$$

vilket är vårt svar.

b) Vi använder Plancherels formel med f som i föregående uppgift

$$\frac{2}{3} = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega =$$

$$= \frac{16}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin(\omega/2)}{\omega}\right|^4 d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin(y)}{y}\right|^4 dy,$$

där vi gjorde variabelsubstitutionen $2y = \omega$ i det sista steget. Om vi multiplicerar båda led med π så får vi

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin(y)}{y}\right|^4 dy = \frac{2\pi}{3},$$

detta är integralen vi söker (att vi kallar integrationsvariabeln för y istället för x spelar ingen roll för integralens värde).

Uppgift 3 a) Låt $0 < \lambda$ och definiera följden $a = \{\lambda^n\}_{n=0}^{\infty}$. Beräkna $\mathcal{Z}-$transformen av a. För vilka z konvergerar transformen?

[1 poäng]

b) Låt a_n vara en följd som uppfyller

$$\sum_{k=0}^{n} 3^{-k} a_{n-k} = 2^{-n}.$$

Beräkna a_n.

[3 poäng]

Lösningsförslag fråga 3. Den här frågan kollar bara att ni har läst om $\mathcal{Z}-$transformen i Vretblad. Fråga a) är exempel 3.20 och fråga b) är exempel 3.27 i Vretblad (med den enda skillnaden att vi benämnde med a_n det som i exemplet benämndes $x(t)$).

Uppgift 4. Lös följande initialvärdesproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t) \quad \text{för } x \in (0,\pi) \text{ och } t > 0 \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 \quad \text{för } t > 0 \\ u(x,0) &= \cos(x) \quad \text{för } x \in (0,\pi). \end{aligned}$$

[4 poäng]

Lösningsförslag fråga 4: Vi gör en variabelseparation och ansätter att

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

är en lösning till differentialekvationen. Detta ger att

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + 1 = -\mu,$$

där μ måste vara en konstant eftersom HL endast beror på t och mittenled endast på x.

Vi kommer att få tre fall, i fall 1 så är $1+\mu = 0$ i vilket fall $X(x) = ax + b$ vilket endast ger triviala lösningar. I fall 2 $1 + \mu < 0$ vilket ger lösningarna $X(x) = ae^{\sqrt{|1+\mu|}x} + be^{-\sqrt{|1+\mu|}x}$. Randdatat $X(0) = 0$ ger att $a = -b$ och randatat att $X(\pi) = 0$ ger att $a(e^{\sqrt{|1+\mu|}\pi} - e^{-\sqrt{|1+\mu|}\pi}) = 0$ vilket ger $a = 0$. Så vi får endast triviala lösningar om inte $1 + \mu > 0$.

Om $1 + \mu > 0$ så kommer $X''(x) + (1 + \mu)X(x) = 0$ att ha lösningarna

$$X(x) = a\cos(\sqrt{1+\mu}x) + b\sin(\sqrt{1+\mu}x).$$

Att $X(0) = 0$ ger att $a = 0$ och $X(\pi) = 0$ ger att $\sqrt{1+\mu} = n = 1, 2, 3, ...$ (annars så är alla lösningar triviala).

Om $\mu = n^2 - 1$ så kommer $T(t) = e^{-(n^2-1)t}$, upp till en multiplikativ konstant. Vi får alltså att lösningarna på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$ är på formen

$$u(x,t) = b_n e^{-(n^2-1)t}\sin(nx).$$

En serieansättning gör att lösningen borde vara på formen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(n^2-1)t}\sin(nx),$$

där b_n väljes så att

$$u(x,0) = \cos(x) \Rightarrow b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x)\sin(nx)dx.$$

För $n = 1$ så får vi att

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x)\sin(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(2x)dx = 0$$

och för $n \geq 2$ så får vi att

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x)\sin(nx)dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d^2\cos(x)}{dx^2}\sin(nx)dx =$$

$$= -\frac{2n}{\pi}(\cos(n\pi)+1) + n^2 b_n,$$

där vi använde två partiella integrationer och identifierade en integral som b_n i det sista steget.

Vi får alltså att för $n \geq 2$ så är

$$b_n = \frac{2n((-1)^n+1)}{\pi(n^2-1)}.$$

Observera att $b_{2m+1} = 0$ för $m = 1, 3, 5, ...$ och $b_{2m} = \frac{8m}{\pi(4m^2-1)}$ så lösningen blir

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8m}{\pi(4m^2-1)} e^{-(4m^2-1)t}\sin(2mx).$$

Del 2.

Uppgift 5. Betrakta $\phi_y(x) = \frac{1}{2}|x-y|$ som en tempererad distribution och definiera, för $f \in \mathcal{S}$,

$$u(y) = \phi_y[f].$$

Visa att

$$\frac{\partial^2 u(y)}{\partial y^2} = f(y).$$

Du får anta att integraler konvergerar och att det är tillåtet att derivera (deriverbara funktioner) under integraltecknet utan bevis.

[4 poäng]

Lösningsförslag fråga 5: Vi har definierat

$$u(y) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)|x-y|dx,$$

detta ger

$$\frac{du(y)}{dy} = \frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left(\int_y^{\infty} f(x)(x-y)dx + \int_{-\infty}^{y} f(x)(y-x)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\int_y^{\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^{y} f(x)dx - f(y)(y-y) + f(y)(y-y)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\int_y^{\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^{y} f(x)dx\right).$$

Deriverar vi igen med avseende på y så får vi

$$\frac{d^2u(y)}{dy^2} = \frac{1}{2}\left(f(y)+f(y)\right) = f(y).$$

Detta är vad vi skulle bevisa.

Uppgift 6. Låt f vara en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion så att $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$. Antag vidare att $\hat{f}(\omega)$ har stöd i $[-M, M]$ (d.v.s. $\hat{f}(\omega) = 0$ för $\omega \notin [-M, M]$). Gäller det att

$$|f'(x)| \leq \frac{M^2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \qquad \text{för alla } x \in \mathbb{R}?$$

[4 poäng]

Lösningsförslag fråga 6: Vi använder formeln för fouriertransformen för en derivata

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega),$$

eftersom $f' \in L^1(\mathbb{R})$ så är transformen väldefinierad.

Använder vi inverstransformen, vilken är väldefinierad eftersom f' är kontinuerligt deriverbar

$$f'(x) = \lim_{A \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} i\omega \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^{M} i\omega \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega,$$

eftersom $\hat{f}(\omega) = 0$ för $|\omega| > M$.

Om vi tar absolutbelopp av båda led så kan vi göra följande skattningar

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-M}^{M} i\omega \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^{M} |i\omega| |\hat{f}(\omega)| |e^{i\omega x}| d\omega \leq \\ &\leq \frac{M}{2\pi} \int_{-M}^{M} |\hat{f}(\omega)| d\omega \leq \\ &\leq \frac{M^2}{\pi} \sup_{\omega \in [-M, M]} |\hat{f}(\omega)|, \end{aligned} \tag{1}$$

där vi använde att $|i\omega| \leq M$ i integralen och att $|e^{i\omega x}| = 1$.

Vi vet också att

$$|\hat{f}(\omega)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\omega x} dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx. \tag{2}$$

Om vi använder (2) i (1) så får vi

$$|f'(x)| \leq \frac{M^2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx,$$

för alla $x \in \mathbb{R}$.

Formler.

Du får använda följande formler utan motivering.

(1) Fouriertransformen $\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$.

(2) $\mathcal{Z}-$transformen för en följd $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definieras $\mathcal{Z}(a)(z) = A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$.

(3) Om $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ och $b = \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ så definierar vi faltningen $c = a * b$ där $c = \{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ och

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k}.$$

Vidare så kommer

$$C(z) = A(z)B(z),$$

där $C(z) = \mathcal{Z}(c)$, $B(z) = \mathcal{Z}(b)$ och $A(z) = \mathcal{Z}(a)$.