Tentamen 2020-01-13, 8:00-12:00

Institutionen för Matematik
SF1632/SF1629 Differentialekvationer och transformer Ten2
13e Januari 2019
Examinator: John Andersson

Endast skrivdon (penna, linjal, gradskiva et.c.) är tillåtna. Specifikt så är miniräknare och formelsammling inte tillåtna.

Motivera alla dina lösningar om inget annat anges.

Preliminära betygsgränser: E: 12p, D: 14p, C: 16p, B: 19p, A: 21p.

Del 1.

Uppgift 1a) Definiera inre produkten i $L^2([0,2], w(x))$ där $w(x) = 1 + x$.

[1 poäng]

b) Hitta det förstagradspolynom $p(x)$ som minimerar

$$\int_0^2 |p(x) - x^2|^2 (1+x)dx.$$

[3 poäng]

Uppgift 2a) Beräkna fouriertransformen av

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{om } |x| < 1 \\ 0 & \text{om } |x| \geq 1. \end{cases}$$

[3 poäng]

b) Beräkna integralen

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^4 dx.$$

[1 poäng]

Uppgift 3 a) Låt $0 < \lambda$ och definiera följden $a = \{\lambda^n\}_{n=0}^{\infty}$. Beräkna $\mathcal{Z}-$transformen av a. För vilka z konvergerar transformen?

[1 poäng]

b) Låt a_n vara en följd som uppfyller

$$\sum_{k=0}^{n} 3^{-k} a_{n-k} = 2^{-n}.$$

Beräkna a_n.

[3 poäng]

Var god vänd!

Uppgift 4. Lös följande initialvärdesproblem

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t) \quad \text{för } x \in (0,\pi) \text{ och } t > 0$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \text{för } t > 0$$
$$u(x,0) = \cos(x) \quad \text{för } x \in (0,\pi).$$

[4 poäng]

Del 2.

Uppgift 5. Betrakta $\phi_y(x) = \frac{1}{2}|x-y|$ som en tempererad distribution och definiera, för $f \in \mathcal{S}$,

$$u(y) = \phi_y[f].$$

Visa att

$$\frac{\partial^2 u(y)}{\partial y^2} = f(y).$$

Du får anta att integraler konvergerar och att det är tillåtet att derivera (deriverbara funktioner) under integraltecknet utan bevis.

[4 poäng]

Uppgift 6. Låt f vara en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion så att $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$. Antag vidare att $\hat{f}(\omega)$ har stöd i $[-M, M]$ (d.v.s. $\hat{f}(\omega) = 0$ för $\omega \notin [-M, M]$). Gäller det att

$$|f'(x)| \leq \frac{M^2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R}?$$

[4 poäng]

Formler.

Du får använda följande formler utan motivering.

(1) Fouriertransformen $\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$.

(2) $\mathcal{Z}-$transformen för en följd $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definieras $\mathcal{Z}(a)(z) = A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$.

(3) Om $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ och $b = \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ så definierar vi faltningen $c = a * b$ där $c = \{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ och

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k}.$$

Vidare så kommer

$$C(z) = A(z)B(z),$$

där $C(z) = \mathcal{Z}(c)$, $B(z) = \mathcal{Z}(b)$ och $A(z) = \mathcal{Z}(a)$.

Lycka till!